Die ebene Vektorrechnung und ihre Anwendungen in der Wechselstromtechnik. Von Dr.-Ing H. Kafka, Ladowitz b Dux (Tschechoslowakei) Teil I: Grundlagen Mit 62 Fig [VII u. 132 S] 8. 1926. Teil II. Besondere Anwendungen in der Wechselstromtechnik (Bd. XXII, 1 u. 2.)

Einführung in die Theorie des Magnetismus. Von Dr. R Gans, Prof. an der Universitat Königsberg. Mit 40 Fig. [VI u. 110 S] 8 1908. (Bd I.)

Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität u. des Magnetismus. Von Dr. Cl Schaefer, Prof an der Universität Breslau. 2. Aufl Mit Bildnis J C. Maxwells und 33 Fig. [VI u. 174 S.] 8 1922 (Bd. III)

Grundzüge der mathemat.-physikalischen Akustik. Von Dr A. Kalahne, Prof an der Techn. Hochschule Danzig 2 Teile I: [VII u 144 S.] 8. 1910. — II: Mit 57 Fig im Text. [X u 225 S] 8. 1913 (Bd XI, 1. u 2.)

Einführung in die kinetische Theorie d. Gase. Von Dr A Byk, Prof. an d Universitat u Techn Hochsch Berlin I.· Die idealen Gase. Mit 14 Fig. [V u. 102 S.] 8. 1910. (Bd X.)

Dispersion u. Absorption d. Lichtes i. ruhend. isotropen Körpern. Theorie u i Folgerungen Von Dr D. A Goldhammer, Prof a d. Univ Kasan Mit 28 Fig. [VI u. 144 S] 8. 1913 (Bd. XVI.)

Die Theorie der Wechselströme. Von Geh. Reg-Rat Dr. E. Orlich, Prof. an der Technischen Hochschule Berlin. Mit 37 Fig. [IV u. 94 S] 8. 1912 (Bd XII.)

Elektromagnet. Ausgleichsvorgänge in Freileitungen u. Kabeln Von Dr Dr.-Ing h c. K W. Wagner, Prof an der Techn Hochschule Berlin. Mit 23 Fig. [V u 109 S.] 8. 1908. (Bd. II)

Elemente der technischen Hydromechanik. Von Dr Dr-Ing. R. v Mises, Prof an der Techn. Hochschule Berlin. 2 Teile I: Mit 72 Figuren [VIII u. 212 S.] 8 1914 [II In Vorb 1926.] (Bd XVII, 1 u 2)

Graphische Hydraulik. Von Zivilingenieur Dr A Schoklitsch, weil Priv-Doz. a d Techn. Hochschule Graz. Mit 45 Fig im Text und auf 2 Tafeln [IV u. 71 S] 8 1923 (Bd XXI)

Die mathematischen Instrumente. Von Geh. Reg-Rat Dr A. Galle, Prof. am Geodätischen Institut in Potsdam Mit 86 Abb. [VI u. 187 S.] 8 1912. (Bd. XV)

Mathematische Theorie d. astronomischen Finsternisse. Von Prof Dr P. Schwahn, weil Dir. der Ges. u Sternwarte „Urania" in Berlin Mit 20 Fig [VI u. 128 S.] 8. 1910 (Bd. VIII.)

Weitere Bände befinden sich in Vorbereitung

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

SAMMLUNG MATHEMATISCH-PHYSIKALISCHER LEHRBÜCHER
HERAUSGEGEBEN VON E. TREFFTZ

6,2

DIE VEKTORANALYSIS

UND IHRE ANWENDUNG IN DER THEORETISCHEN PHYSIK

VON

DR. W. v. IGNATOWSKY
PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT IN LENINGRAD

TEIL II

ANWENDUNG DER VEKTORANALYSIS IN DER THEORETISCHEN PHYSIK

MIT 14 TEXTFIGUREN

DRITTE, NEUBEARBEITETE AUFLAGE

VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER · LEIPZIG · BERLIN 1926

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

Mechanik.

I. Mechanik diskreter Massenpunkte.

II. Starre Körper.

III. Elastische Körper.

IV. Flüssige Körper.

Erster Abschnitt

Mechanik.

I. Mechanik diskreter Massenpunkte.

1. Mechanik eines Massenpunktes. Die Bewegungsgleichung eines Massenpunktes lautet bekanntlich

$$m \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{K}. \tag{1}$$

Hier bedeutet m die Masse des Massenpunktes, $\mathfrak{K}$ die auf ihn wirkende Kraft und $\mathfrak{v}$ seine Geschwindigkeit, bezogen auf ein Koordinatensystem, das wir ein im Raume festes nennen wollen Diese Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ist im allgemeinen ein mit der Zeit nach Richtung und Betrag veränderlicher Vektor.

Es sei P (Fig 1) ein im Raume fester Punkt, AB die Bahn des Massenpunktes und $\mathfrak{r}$ ein Radiusvektor, der vom Anfangspunkt P bis zum augenblicklichen Ort M des Massenpunktes gezogen ist. Aus (164) I[1]) folgt deshalb

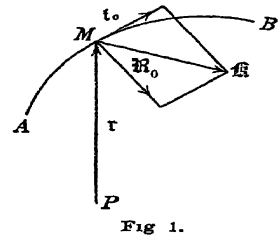



Fig 1.

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{d\mathfrak{r}}{dl} \cdot \frac{dl}{dt} = \mathfrak{t}_0 v = \mathfrak{v}, \tag{2}$$

wo dl den Betrag eines Elementes $d\mathfrak{r}$ der Bahn und $\mathfrak{t}_0$ den Einheitsvektor längs der Tangente zur Bahn bedeutet Es ist also $d\mathfrak{r} = \mathfrak{t}_0 dl$. v ist der Betrag von $\mathfrak{v}$. Alle Größen beziehen sich auf die Stelle M der Bahn Aus (2) ersehen wir, daß die Geschwindigkeitsrichtung mit der Tangente zur Bahn zusammenfallt

Aus (2) und (1) folgt weiter

$$m \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = m\mathfrak{t}_0 \frac{dv}{dt} + mv^2 \frac{d\mathfrak{t}_0}{dl} = \mathfrak{K}$$

---

1) Die römische Ziffer I bezeichnet hier und im folgenden den ersten Teil dieser Schrift, wo die Gleichungen durchlaufende Nummern erhalten haben

oder wegen (165) I

$$(3) \qquad \mathfrak{K} = m\mathfrak{t}_0 \frac{d^2 l}{dt^2} + \frac{\mathfrak{R}_0}{R} mv^2,$$

wo R den Krümmungsradius der Bahn an der Stelle M bedeutet und $\mathfrak{R}_0$ den Einheitsvektor längs dem Krümmungsradius zum Krümmungsmittelpunkt hin. Aus (3) ergibt sich, daß wir $\mathfrak{K}$ in zwei Komponenten zerlegen können, die eine parallel der Tangente zur Bahn, die andere senkrecht dazu, zum Krümmungsmittelpunkt der Bahn hin. Diese letztere nennt man Zentripetalkraft

Multiplizieren wir jetzt $\mathfrak{K}$ skalar mit dem Element

$$d\mathfrak{r} = \mathfrak{t}_0 dl,$$

so gibt das Produkt $\mathfrak{K}d\mathfrak{r}$ die Arbeit an, die die Kraft $\mathfrak{K}$ bei der Verschiebung des Massenpunktes längs $d\mathfrak{r}$ geleistet hat Anderseits folgt aus (3), da $d\mathfrak{r}$ gleichgerichtet mit $\mathfrak{t}_0$ und senkrecht zu $\mathfrak{R}_0$ ist

$$(4) \qquad \mathfrak{K}\,d\mathfrak{r} = m \cdot \frac{d^2 l}{dt^2}\,dl = m\,\frac{dv}{dt}\,v\,dt = dL,$$

$$(5) \quad \text{wo} \qquad L = \frac{mv^2}{2}$$

die kinetische Energie des Massenpunktes bedeutet.

Integrieren wir (4) längs einer endlichen Bahnlänge l, so folgt

$$(\mathrm{a}) \qquad A \equiv \int_l \mathfrak{K}\,d\mathfrak{r} = L_1 - L_0.$$

Diese Gleichung sagt aus, daß die von der Kraft längs der Kurve l geleistete Arbeit A gleich ist der Zunahme der kinetischen Energie des Massenpunktes Die Zentripetalkraft leistet hierbei ersichtlich keine Arbeit, trägt demnach auch nichts zu der Änderung der kinetischen Energie bei.

Hängt die kinetische Energie nur von der Lage des Massenpunktes ab, d. h. nimmt sie denselben Wert an, wenn der Massenpunkt in seine Anfangslage zurückkehrt, so ist das Integral (a) längs einer geschlossenen Kurve gleich Null.

Wir schließen daraus, daß $\mathfrak{K}$ in diesem Fall nach Nr. 20 I von einem einwertigen Potential ableitbar ist, das wir mit V bezeichnen wollen:

$$(6) \qquad \mathfrak{K} = -\nabla V \quad \text{und} \quad \mathfrak{K}\,d\mathfrak{r} = -dV$$

Hieraus und aus (4) folgt

$$(7) \qquad d(L+V) = 0 \quad \text{oder} \quad L + V = \text{konst.}$$

V wird die potentielle Energie genannt. Gl. (7) drückt das Prinzip der Erhaltung der Energie aus.

Wir fuhren jetzt noch zwei Größen ein: die Bewegungsgroße eines Massenpunktes

$$\mathfrak{b} = m\mathfrak{v} \tag{8}$$

und das auf P bezogene Moment der Bewegungsgroße eines Massenpunktes:

$$\mathfrak{u} = [\mathfrak{r}\, m\, \mathfrak{v}] = m\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{v}]. \tag{9}$$

Aus dem Begriff des vektorischen Produktes folgt, daß $\mathfrak{u}$ auf der durch $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{v}$ bestimmten Ebene senkrecht steht und den Betrag

$$|\mathfrak{u}| = r\, m\, v \sin(\mathfrak{r}\,\mathfrak{v}) \tag{b}$$

hat, wobei $|\mathfrak{r}| = r$ ist.

Aus Fig. 1 ergibt sich sofort, daß (9) auf eine Drehung des Massenpunktes M um eine durch den Punkt P gehende Achse hinweist. Die Umfangsgeschwindigkeit ist $v \sin(\mathfrak{r}\,\mathfrak{v})$ in der Entfernung r von der Achse. Da nach Fig. 1 diese Drehung im Sinne des Uhrzeigers ist, wenn wir die Bahn in die Zeichenebene gelegt denken, so weist nach der Fingerregel die positive Richtung von $\mathfrak{u}$ vom Beschauer senkrecht zur Zeichenebene.

Bezeichnen wir die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit der Drehung mit ω, so ist

$$r\omega = v \sin(\mathfrak{r}\,\mathfrak{v}). \tag{c}$$

Aus (c), (b) und (9) folgt

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{u}_0\, m\, r^2\, \omega, \tag{10}$$

wo $\mathfrak{u}_0$ den Einheitsvektor längs $\mathfrak{u}$ bedeutet

Aus (9), (2) und (1) fließt weiter

$$\frac{d\mathfrak{u}}{dt} = [\mathfrak{r}\,\mathfrak{K}], \tag{11}$$

denn
$$\frac{d\mathfrak{u}}{dt} = \left[\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\, m\, \mathfrak{v}\right] + \left[\mathfrak{r}\, m\, \frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right],$$

und das erste Glied verschwindet infolge von (2) als das vektorische Produkt zweier gleichgerichteter Vektoren. Die rechte Seite von (11) nennt man das auf P bezogene Moment der Kraft $\mathfrak{K}$. Hierbei bezeichnet man den Anfangspunkt P als Bezugspunkt oder Momentenpunkt.

Aus der Fig. 1 ist ersichtlich, daß der Betrag von $[\mathfrak{r}\, d\,\mathfrak{r}]$ gleich der doppelten Fläche ist, die der Radiusvektor in der Zeit dt beschreibt

Fällt im besondern die Richtung der Kraft mit $\mathfrak{r}$ zusammen, haben wir es also mit einer Zentralkraft zu tun, so ist die rechte Seite von (11) gleich Null, und wir erhalten

$$\mathfrak{u} = m[\mathfrak{r}\,\mathfrak{v}] = m\left[\mathfrak{r}\,\frac{d\,\mathfrak{r}}{d\,t}\right] = \text{konst.}$$

D. h. der Vektor $\mathfrak{r}$ beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächen. Man bezeichnet deshalb die Gleichung (11) als den Flächensatz für einen einzelnen Massenpunkt.

Endlich folgt aus (1) und (8)

$$\frac{d\,\mathfrak{b}}{d\,t} = \mathfrak{K}. \tag{12}$$

2. Relative Bewegung. Bis jetzt haben wir die Bewegung eines Massenpunktes gegen ein im Raum festes Koordinatensystem untersucht. Wir wollen jetzt ermitteln, wie sich die Geschwindigkeiten und die Beschleunigungen relativ zu einem sich beliebig bewegenden Koordinatensystem darstellen.

Wir haben demnach zwei Achsenkreuze zu berücksichtigen: ein festes und ein bewegliches. Der Koordinatenanfang des ersten sei O, der des zweiten O_1 (Fig. 2) Der Massenpunkt befinde sich in M Dann wird die absolute Lage von M durch $\mathfrak{r}$ und die von O_1 durch $\mathfrak{r}_1$ dargestellt. Der Vektor $O_1 M$ werde mit $\mathfrak{r}'$ bezeichnet.

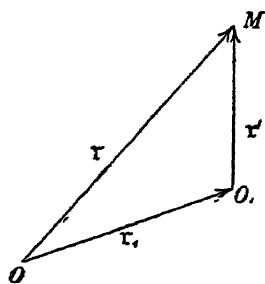



Fig 2

(a) Nach Fig 2 ist $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}'$,

(b) daher $\frac{d\,\mathfrak{r}}{d\,t} = \frac{d\,\mathfrak{r}_1}{d\,t} + \frac{d\,\mathfrak{r}'}{d\,t}$.

Nehmen wir vorübergehend den Punkt O_1 als ruhend an ($d\,\mathfrak{r}_1 = 0$). Dann kann das bewegliche System nur noch eine Drehung um O_1 ausführen. Der Einheitsvektor in Richtung der augenblicklichen Drehungsachse sei $\mathfrak{w}_0$ Sein Richtungssinn sei dem Drehungssinn nach einer Rechtsschraube zugeordnet ω sei die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit Wir setzen $\omega\,\mathfrak{w}_0 = \mathfrak{w}$. Die Spitze eines von O_1 ausgehenden und mit dem beweglichen System fest verbundenen Vektors $\mathfrak{A}$ (der also die Drehung des beweglichen Systems mitmacht) hat dann ersichtlich nach Betrag und Richtung die Umfangsgeschwindigkeit $[\mathfrak{w}\,\mathfrak{A}]$ gegen das feste System.

Es sei jetzt $\mathfrak{A}$ auch im beweglichen System kein konstanter Vektor Die Geschwindigkeit seiner Spitze gegen das bewegliche System

werde mit $\frac{\mathrm{d}\mathfrak{A}}{\mathrm{d}t}$ bezeichnet. Dann ist ihre Geschwindigkeit gegen das feste System, wenn der Punkt O_1 immer noch im festen System ruht,

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = [\mathfrak{w}\mathfrak{A}] + \frac{\mathrm{d}\mathfrak{A}}{\mathrm{d}t}. \tag{c}$$

(Eulersche Formel.) Das gilt auch fur den Ortsvektor $\mathfrak{r}'$ des Punktes M:

$$\frac{d\mathfrak{r}'}{dt} = [\mathfrak{w}\mathfrak{r}'] + \frac{\mathrm{d}\mathfrak{r}'}{\mathrm{d}t} \tag{d}$$

Damit geht (b) über in

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \frac{d\mathfrak{r}_1}{dt} + [\mathfrak{w}\mathfrak{r}'] + \frac{\mathrm{d}\mathfrak{r}'}{\mathrm{d}t} \tag{13}$$

oder mit leichtverständlichen andern Bezeichnungen

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_f + \mathfrak{v}' \tag{14a}$$

(14b) mit $$\mathfrak{v}_f = \mathfrak{v}_1 + [\mathfrak{w}\mathfrak{r}'].$$

Die absolute Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ist gleich der vektorischen Summe der Fuhrungsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_f$ und der relativen Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'$. Die Fuhrungsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}_f$ ist demnach die Geschwindigkeit eines im beweglichen System ruhenden Punktes $\mathfrak{r}'$ gegen das feste System $\mathfrak{v}_1$ ist die Geschwindigkeit des Punktes O_1.

Wir berechnen jetzt die Beschleunigung $\mathfrak{p}$ des Punktes M aus (14a):

$$\mathfrak{p} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{d\mathfrak{v}_f}{dt} + \frac{d\mathfrak{v}'}{dt}. \tag{e}$$

Hierin ist nach (14b)

$$\frac{d\mathfrak{v}_f}{dt} = \frac{d\mathfrak{v}_1}{dt} + \left[\frac{d\mathfrak{w}}{dt}\mathfrak{r}'\right] + \left[\mathfrak{w}\frac{d\mathfrak{r}'}{dt}\right] \tag{f}$$

oder nach (d)

$$\frac{d\mathfrak{v}_f}{dt} = \mathfrak{p}_1 + \left[\frac{d\mathfrak{w}}{dt}\mathfrak{r}'\right] + [\mathfrak{w}([\mathfrak{w}\mathfrak{r}'] + \mathfrak{v}')], \tag{g}$$

oder anders geschrieben

$$\frac{d\mathfrak{v}_f}{dt} = \mathfrak{p}_f + [\mathfrak{w}\mathfrak{v}'], \tag{15a}$$

(16a) wo $$\mathfrak{p}_f = \mathfrak{p}_1 + \left[\frac{d\mathfrak{w}}{dt}\mathfrak{r}'\right] - [\mathfrak{w}[\mathfrak{r}'\mathfrak{w}]]$$

als Führungsbeschleunigung zu bezeichnen sein wird. Sie ist die Beschleunigung eines gegen das bewegliche System dauernd ruhenden Punktes $\mathfrak{r}'$. Sie setzt sich zusammen aus der Beschleunigung $\mathfrak{p}_1$ des Punktes O_1, aus der Beschleunigung infolge der Änderung der Winkelgeschwindigkeit nach Betrag und Achse und aus der Zentripetalbeschleunigung. Denn $[\mathfrak{w}_0[\mathfrak{r}'\mathfrak{w}_0]]$ ist die zur Drehungsachse senkrechte Komponente von $\mathfrak{r}'$ Ferner ist nach (c)

$$\text{(h)} \qquad \frac{d\mathfrak{v}'}{dt} = [\mathfrak{w}\mathfrak{v}'] + \frac{\mathrm{d}\mathfrak{v}'}{\mathrm{d}t}$$

$$\text{(15 b)} \quad \text{oder} \qquad \frac{d\mathfrak{v}'}{dt} = [\mathfrak{w}\mathfrak{v}'] + \mathfrak{p}',$$

wo $\mathfrak{p}'$ die relative Beschleunigung des Punktes M, also gegen das bewegliche System bedeutet Aus (e), (15 a), (15 b) folgt

$$\text{(16 b)} \qquad \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_f + \mathfrak{p}_c + \mathfrak{p}',$$

$$\text{(16 c)} \quad \text{wo} \qquad \mathfrak{p}_c = 2[\mathfrak{w}\mathfrak{v}']$$

der nach Coriolis benannte Beschleunigungsanteil ist. Er fehlt, wenn M relativ ruht oder wenn sich das bewegte System gegen das feste nicht dreht, sondern nur verschiebt, oder wenn die relative Geschwindigkeit von M der Drehungsachse des beweglichen Systems parallel ist. Im allgemeinen ist aber nach (16 b) die absolute Beschleunigung die vektorische Summe der Führungsbeschleunigung $\mathfrak{p}_f$, der Coriolisschen Beschleunigung $\mathfrak{p}_c$ und der relativen Beschleunigung $\mathfrak{p}'$. Der Punkt M hat nur die Coriolissche Beschleunigung allein, wenn er z. B den Punkt O_1 ($\mathfrak{r}' = 0$) mit konstanter relativer Geschwindigkeit ($\mathfrak{p}' = 0$) passiert, während sich das bewegliche System um eine Achse durch den ruhenden oder sich gleichförmig bewegenden Punkt O_1 ($\mathfrak{p}_1 = 0$) dreht.

3. Die Bewegung eines Systems von Massenpunkten. Gegeben sei ein System von Massenpunkten, und auf jeden von ihnen wirke eine Kraft $\mathfrak{K}_n$. Wir können auf diesen Fall die Gleichungen (11) und (12) anwenden, indem wir sie über alle Massenpunkte summieren, und erhalten

$$\text{(17)} \qquad \frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \sum \mathfrak{K}_n$$

$$\text{(18)} \quad \text{und} \qquad \frac{d\mathfrak{U}}{dt} = \sum [\mathfrak{r}_n \mathfrak{K}_n],$$

$$\text{(19)} \quad \text{wo} \qquad \mathfrak{B} = \sum \mathfrak{b} = \sum m_n \mathfrak{v}_n$$

$$\text{(20)} \quad \text{und} \qquad \mathfrak{U} = \sum \mathfrak{u} = \sum [\mathfrak{r}_n m_n \mathfrak{v}_n] \quad \text{ist}$$

Der Massenmittelpunkt (Ortsvektor $\mathfrak{R}$) wird erklart durch

$$M\mathfrak{R} = m_1 \mathfrak{r}_1 + m_2 \mathfrak{r}_2 + \cdots = \sum m_n \mathfrak{r}_n \tag{21}$$

Hier bestimmen $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ usw. die Lagen der einzelnen Massenpunkte $m_1, m_2, \ldots$ gegen ein festes Koordinatensystem, $M = \sum m$ bedeutet die Gesamtmasse aller Massenpunkte und $\mathfrak{R}$ den Radiusvektor vom Koordinatenanfang des festen Systems bis zum Massenmittelpunkt

Aus (19) und (21) folgt, wenn $\mathfrak{V} = \frac{d\mathfrak{R}}{dt}$ die Geschwindigkeit des Massenmittelpunktes bedeutet:

$$M\frac{d\mathfrak{R}}{dt} = M\mathfrak{V} = \sum m_n \mathfrak{v}_n = \mathfrak{B}, \tag{22}$$

und hieraus und aus (17)

$$M\frac{d\mathfrak{V}}{dt} = \sum \mathfrak{K}_n. \tag{23}$$

Die Gleichung (23) nennt man den Satz von der Bewegung des Massenmittelpunktes. Er besagt, daß dieser Punkt sich so bewegt, als ob in ihm alle Massen vereinigt wären und die Resultante aller Kräfte angriffe.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{r}_n'$ die Entfernung eines Massenpunktes m_n vom Massenmittelpunkt und $\frac{d\mathfrak{r}_n'}{dt}$ mit $\mathfrak{v}_n'$. Es ist dann

$$\mathfrak{r}_n = \mathfrak{r}_n' + \mathfrak{R} \quad \text{und} \quad \mathfrak{v}_n = \mathfrak{v}_n' + \mathfrak{V} \tag{a}$$

Hier bestimmt sich $\mathfrak{v}_n'$ durch (d) Nr. 2 und darf nicht mit $\mathfrak{v}'$ in Nr. 2 verwechselt werden

Aus (a), (21) und (22) erhalten wir

$$\sum m_n \mathfrak{r}_n' = 0 \tag{24}$$

$$\sum m_n \frac{d\mathfrak{r}_n'}{dt} = \sum m_n \mathfrak{v}_n' = 0, \tag{25}$$

und aus (20), (24) und (25)

$$\mathfrak{U} = \sum m_n [(\mathfrak{R} + \mathfrak{r}_n')(\mathfrak{V} + \mathfrak{v}_n')] = M[\mathfrak{R}\mathfrak{V}] + \sum m_n [\mathfrak{r}_n' \mathfrak{v}_n'] \tag{26}$$

Es folgt weiter aus (21)

$$M\frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} = M\frac{d\mathfrak{V}}{dt} = \sum m_n \frac{d^2\mathfrak{r}_n}{dt^2}$$

und daher nach (23)

$$\sum m_n \left[\mathfrak{R}\frac{d^2\mathfrak{r}_n}{dt}\right] = M\left[\mathfrak{R}\frac{d\mathfrak{V}}{dt}\right] = \sum [\mathfrak{R}\mathfrak{K}_n]. \tag{27}$$

Differenzieren wir (26) nach t und setzen den so erhaltenen Ausdruck in (18) ein, so erhalten wir wegen (27) und (a)

$$\frac{d\mathfrak{U}'}{dt} = \sum [\mathfrak{r}'_n \mathfrak{K}_n]; \tag{28}$$

(29) dabei ist $\mathfrak{U}' = \sum m_n [\mathfrak{r}'_n \mathfrak{v}'_n]$

4 Innere und äußere Kräfte. Die Kräfte in (17) werden gewöhnlich in innere und äußere geteilt. Hierbei versteht man unter einer inneren Kraft eines Systems die auf einen Massenpunkt wirkende Kraft, die ihre Entstehung der Anwesenheit der anderen Massenpunkte des Systems verdankt. Alle anderen Kräfte werden als äußere bezeichnet. Wir bezeichnen die äußeren Kräfte mit $\mathfrak{P}$ und die inneren mit $\mathfrak{J}$, also $\mathfrak{K}_n = \mathfrak{J}_n + \mathfrak{P}_n$. Für die inneren Kräfte nimmt man an

$$\sum \mathfrak{J}_n = 0, \qquad \sum [\mathfrak{r}_n \mathfrak{J}_n] = 0, \tag{30}$$

das sogenannte Reaktionsprinzip oder Wechselwirkungsgesetz.

Demnach müssen wir statt (17) und (18) schreiben

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \sum \mathfrak{P}_n \tag{31}$$

(32) und $$\frac{d\mathfrak{U}}{dt} = \sum [\mathfrak{r}_n \mathfrak{P}_n].$$

Weiter bekommen wir statt (23) und (28)

$$M \frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \sum \mathfrak{P}_n \tag{33}$$

(34) und $$\frac{d\mathfrak{U}'}{dt} = \sum [\mathfrak{r}'_n \mathfrak{P}_n]$$

Wirken auf das System keine äußeren Kräfte, so sagt (33), daß sich der Massenmittelpunkt mit konstanter Geschwindigkeit bewegt oder in Ruhe verbleibt, wenn er dies zu Anfang war, und (32) und (34), daß $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}'$ konstant bleiben.

Bezeichnen wir mit L die sogenannte kinetische oder Bewegungsenergie $\frac{1}{2}\sum m_n \mathfrak{v}_n^2$ des Systems, so folgt aus (4)

(a) $$dL = \sum \mathfrak{K}_n d\mathfrak{r}_n = \sum \mathfrak{P}_n d\mathfrak{r}_n + \sum \mathfrak{J}_n d\mathfrak{r}_n.$$

Sind die inneren Kräfte von einem Potential V ableitbar, so daß

(b) $$\sum \mathfrak{J}_n d\mathfrak{r}_n = -dV$$ ist, so erhalten wir

$$d(L + V) = \sum \mathfrak{P}_n d\mathfrak{r}_n. \tag{35}$$

Wirken auf das System keine äußeren Kräfte, so ergibt (35), daß hierbei die gesamte Energie $L + V$ des Systems konstant bleibt. Die Gleichung (35) nennt man die Energiegleichung des Systems.

Für die Arbeit in der Zeiteinheit, die Leistung, erhalten wir aus (a)

$$\frac{dL}{dt} = \sum \mathfrak{P}_n \mathfrak{v}_n + \sum \mathfrak{J}_n \mathfrak{v}_n. \tag{36}$$

Führen wir ein beliebig bewegtes Koordinatensystem ein und bezeichnen mit $\mathfrak{V}_1$ die absolute Geschwindigkeit des Koordinatenanfanges dieses Systems und mit $\mathfrak{r}_n''$ den Radiusvektor von diesem Koordinatenanfang bis zum Massenpunkt, so folgt aus (13)

$$\sum \mathfrak{J}_n \mathfrak{v}_n = \mathfrak{V}_1 \sum \mathfrak{J}_n + \sum \mathfrak{J}_n \frac{d\mathfrak{r}_n''}{dt} + \mathfrak{w} \sum [\mathfrak{r}_n'' \mathfrak{J}_n]. \tag{c}$$

Anderseits liefert (30)

$$\sum [\mathfrak{r}_n \mathfrak{J}_n] = [\mathfrak{R}_1 \sum \mathfrak{J}_n] + \sum [\mathfrak{r}_n'' \mathfrak{J}_n] = \sum [\mathfrak{r}_n'' \mathfrak{J}_n] = 0, \tag{d}$$

wo $\mathfrak{R}_1$ den Radiusvektor vom Koordinatenanfang des festen bis zum Koordinatenanfang des beweglichen Systems bedeutet, woraus

$$\sum \mathfrak{J}_n \mathfrak{v}_n = \sum \mathfrak{J}_n \frac{d\mathfrak{r}_n''}{dt}. \tag{37}$$

Demnach können wir statt (36) schreiben:

$$\frac{dL}{dt} = \sum \mathfrak{P}_n \mathfrak{v}_n + \sum \mathfrak{J}_n \frac{d\mathfrak{r}_n''}{dt}. \tag{38}$$

5. Ableitung der Zustandsgleichung idealer Gase. Als Beispiel eines Systems von Massenpunkten können wir ein ideales Gas ansehen. Wir wollen für dieses die Zustandsgleichung ableiten

Ein ideales Gas ist dadurch definiert, daß seine Moleküle durch keinerlei gegenseitige Kräfte beeinflußt werden und nur insofern aufeinander wirken, als sie beim Hin- und Herbewegen gegeneinander stoßen können. Wir müssen deshalb, indem wir jedes Molekül als Massenpunkt auffassen, alle $\mathfrak{J}$ gleich Null setzen

Wir bestimmen jetzt den Mittelwert $\overline{L}$ der kinetischen Energie L des Gases über ein Zeitintervall t, d h.

$$\overline{L} = \frac{1}{t}\int_0^t L\,dt. \tag{a}$$

Durch partielle Integration ($\mathfrak{v}\,d\mathfrak{r} = d\{\mathfrak{v}\mathfrak{r}\} - \mathfrak{r}\,d\mathfrak{v}$) erhalten wir

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} \overline{L} = \frac{1}{t}\int\limits_0^t L\,dt = \frac{1}{2t}\int\limits_0^t \sum m_n \left(\frac{d\mathfrak{r}_n}{dt}\right)^2 dt = \\ = \frac{1}{4t}\left[\sum m_n \frac{d\mathfrak{r}_n^2}{dt}\right]_0^t - \frac{1}{2t}\int\limits_0^t \sum m_n \mathfrak{r}_n \frac{d^2\mathfrak{r}_n}{dt^2}\,dt, \end{cases}$$

oder da die $\mathfrak{F}$ gleich Null sind:

$$\text{(39)} \qquad \overline{L} = \frac{1}{4t}\left[\sum m_n \frac{d\mathfrak{r}_n^2}{dt}\right]_0^t - \frac{1}{2t}\int\limits_0^t \sum \mathfrak{r}_n \mathfrak{P}_n\,dt.$$

Man nimmt in der kinetischen Gastheorie an, daß die absolute Temperatur T proportional mit $\overline{L}$ ist, d. h.

$$\text{(c)} \qquad T = \frac{1}{a}\overline{L} \qquad \text{oder} \qquad aT = \overline{L},$$

wo a einen konstanten Proportionalitätsfaktor bedeutet.

Bei einem stationären Zustand bewegen sich die einzelnen Molekule so, daß alle möglichen Verhältnisse auftreten. Da $\mathfrak{r}_n^2$ positiv ist, wird deshalb $\sum m_n \mathfrak{r}_n^2 =$ konstant sein, das erste Glied rechts in (39) verschwindet, und wir erhalten

$$\text{(40)} \qquad \overline{L} = -\tfrac{1}{2}\sum \overline{\mathfrak{r}_n \mathfrak{P}_n},$$

wo der Strich uber $\mathfrak{r}\mathfrak{P}$ bedeutet, daß man den mittleren Wert dieser Große nehmen soll.

Die rechte Seite von (40) nennt man das m i t t l e r e V i r i a l und zwar das ä u ß e r e, zum Unterschiede vom inneren, wo $\mathfrak{P}$ durch $\mathfrak{F}$ zu ersetzen wäre.

Bei einem idealen Gase sind die äußeren Kräfte der Druck des Gefäßes auf das Gas. Da sich hierbei $\mathfrak{r}_n$ auf die Wand des Gefäßes bezieht, so ist es konstant, bezogen auf die Zeit, und deshalb ist

$$\text{(d)} \qquad \overline{L} = -\frac{1}{2t}\sum \mathfrak{r}_n \int\limits_0^t \mathfrak{P}_n\,dt.$$

Bezeichnen wir den Betrag des mittleren Druckes der Gefäßwand auf das Gas mit p, auf die Einheit der Fläche berechnet, und be-

achten, daß der Druck überall gleich und normal zur Fläche und nach innen gerichtet ist, so können wir statt (d) mit Hilfe des Gauß schen Satzes schreiben:

$$\text{(e)} \qquad \overline{L} = \frac{p}{2}\int_F \mathfrak{n}\mathfrak{r}\,df = \frac{p}{2}\int_F \mathfrak{r}\,d\mathfrak{f} = \frac{p}{2}\int_V \operatorname{div}\mathfrak{r}\cdot dv,$$

wo V das Volumen, F die innere Oberfläche des Gefäßes und $\mathfrak{n}$, wie immer, die hierzu äußere Normale bedeutet.

Wegen (100) I erhalten wir aus (e)

$$\text{(41)} \qquad \overline{L} = \frac{3}{2}pV \qquad \text{und nach (c):}$$

$$\text{(42)} \qquad pV = \frac{2}{3}\overline{L} = \frac{2a}{3}T = RT,$$

$$\text{(f)} \quad \text{wo} \qquad R = \frac{2a}{3}$$

die Gaskonstante bedeutet (42) ist die bekannte Zustandsgleichung für ideale Gase.

II. Starre Körper.

6. Allgemeine Beziehungen. Unter einem starren Körper verstehen wir einen Körper, bei dem keine Relativbewegungen der einzelnen Teile gegeneinander vorkommen. Wir denken uns das bewegliche Koordinatensystem fest mit dem starren Körper verbunden und betrachten jedes Volumenelement als Massenpunkt. Dann mussen wir bei Anwendung der in Nr. 3 und 4 angeführten Resultate

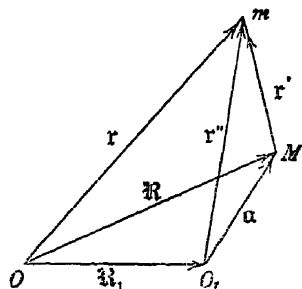
$$\text{(a)} \qquad \frac{d\mathfrak{r}''}{dt} = 0$$

setzen. Wir werden, da Mißverständnisse ausgeschlossen sind, den Index n weglassen und unter $\sum$ die Summation über den ganzen Körper verstehen

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{a}$ den Radiusvektor vom Koordinatenanfang O_1 (Fig. 3) des beweglichen Systems bis zum Massenmittelpunkt M, so werden wir entsprechend den Bezeichnungen in Nr. 3 und 4 allgemein haben:

Fig 3

$$\text{(b)} \qquad \mathfrak{r} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{r}'' = \mathfrak{R} + \mathfrak{r}',$$

$$\mathfrak{r}'' = \mathfrak{a} + \mathfrak{r}',$$

woraus
$$\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R} - \mathfrak{a}$$
und nach der Eulerschen Formel (c) Nr. 2 als Geschwindigkeit von O_1

$$\text{(c)} \qquad \mathfrak{B}_1 = \frac{d\mathfrak{R}_1}{dt} = \frac{d\mathfrak{R}}{dt} - \frac{d\mathfrak{a}}{dt} = \mathfrak{B} - [\mathfrak{w}\,\mathfrak{a}],$$

da
$$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{a}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \text{ist}$$

Aus (b) und (24) Nr. 3 erhalten wir

$$\text{(d)} \qquad \sum m\,\mathfrak{r}'' = M\mathfrak{a}.$$

Deshalb ist nach (38) Nr. 4 und (13) Nr. 2

$$(1) \qquad \frac{dL}{dt} = \sum \mathfrak{P}\mathfrak{v} = \mathfrak{B}_1 \sum \mathfrak{P} + \mathfrak{w} \sum [\mathfrak{r}''\mathfrak{P}]$$

und wegen (d) und (c)

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{G} &= \sum m\,\mathfrak{v} = M\mathfrak{B}_1 + [\mathfrak{w} \sum m\,\mathfrak{r}''] = \\ &= M\mathfrak{B}_1 + M[\mathfrak{w}\,\mathfrak{a}] = M\mathfrak{B}. \end{aligned} \right.$$

Hieraus und aus (31) Nr. 4, (c) Nr. 2 und (a) ergibt sich weiter

$$(3) \qquad \frac{d\mathfrak{G}}{dt} = M\frac{d\mathfrak{B}_1}{dt} + M\left[\frac{d\mathfrak{w}}{dt}\,\mathfrak{a}\right] + M[\mathfrak{w}[\mathfrak{w}\,\mathfrak{a}]] = \sum \mathfrak{P}.$$

Und (siehe weiter Gl. (f))

$$(4) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{U} &= \sum [\mathfrak{r}\,m\,\mathfrak{v}] = \sum [(\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{r}'')(m\mathfrak{B}_1 + m[\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}''])] = \\ &= M[\mathfrak{R}_1\mathfrak{B}_1] + M[\mathfrak{R}_1[\mathfrak{w}\,\mathfrak{a}]] + M[\mathfrak{a}\,\mathfrak{B}_1] + \sum [\mathfrak{r}''m[\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}'']] \end{aligned} \right.$$

und nach (32) Nr. 4 ist $\dfrac{d\mathfrak{U}}{dt} = \sum [\mathfrak{r}\mathfrak{P}]$.

Außerdem ist

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} L &= \sum \frac{m\,\mathfrak{v}^2}{2} = \frac{1}{2} \sum m\,(\mathfrak{B}_1 + [\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}''])^2 \\ &= \frac{M\mathfrak{B}_1^2}{2} + M\,\mathfrak{B}_1[\mathfrak{w}\,\mathfrak{a}] + \frac{1}{2}\sum m\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}'']^2. \end{aligned} \right.$$

Aus (5) und (2) folgt

$$\text{(e)} \qquad \frac{dL}{dt} = \frac{\mathfrak{B}_1\,d\mathfrak{G}}{dt} + M\frac{d\mathfrak{B}_1}{dt}[\mathfrak{w}\,\mathfrak{a}] + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum m\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}'']^2.$$

Berücksichtigen wir, daß nach (13) Nr. 2 und nach (a) die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes m mit dem relativen Ortsvektor $\mathfrak{r}''$

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{B}_1 + [\mathfrak{w}\mathfrak{r}''] \tag{f}$$

ist, so erhalten wir für das letzte Glied in (e) nach einigen leichten Umformungen

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum m[\mathfrak{w}\mathfrak{r}'']^2 = w\frac{dw}{dt}\Theta + w^2\frac{d\mathfrak{w}_0}{dt}\mathfrak{U}'', \tag{g}$$

wo w den Betrag, $\mathfrak{w}_0$ den Einheitsvektor von $\mathfrak{w}$ bedeutet und

$$\Theta = \sum m[\mathfrak{w}_0\mathfrak{r}'']^2 = \mathfrak{w}_0\{\sum m(\mathfrak{r}''^2 - \mathfrak{r}''\cdot\mathfrak{r}'')\}\mathfrak{w}_0, \tag{6}$$

$$\mathfrak{U}'' = \sum m[\mathfrak{r}''[\mathfrak{w}_0\mathfrak{r}'']] = \mathfrak{w}_0\sum m(\mathfrak{r}''^2 - \mathfrak{r}''\cdot\mathfrak{r}'') \tag{7}$$

ist. Es ist klar, daß $w\mathfrak{U}''$ für $\mathfrak{a} = 0$ in $\mathfrak{U}'$ (29) Nr. 3 übergeht.

Anderseits erhalten wir aus (3)

$$\text{(h)}\quad\left\{\begin{aligned} &M\frac{d\mathfrak{B}_1}{dt}[\mathfrak{w}\mathfrak{a}] = [\mathfrak{w}\mathfrak{a}]\frac{d\mathfrak{B}}{dt} - M\left[\frac{d\mathfrak{w}}{dt}\mathfrak{a}\right][\mathfrak{w}\mathfrak{a}] = \\ &= [\mathfrak{w}\mathfrak{a}]\frac{d\mathfrak{B}}{dt} - w\frac{dw}{dt}M[\mathfrak{w}_0\mathfrak{a}]^2 - w^2M\frac{d\mathfrak{w}_0}{dt}[\mathfrak{a}[\mathfrak{w}_0\mathfrak{a}]]\end{aligned}\right.$$

Aus (e), (g), (h) und (c) folgt

$$\text{(8)}\quad\left\{\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= (\mathfrak{B}_1 + [\mathfrak{w}\mathfrak{a}])\frac{d\mathfrak{B}}{dt} + w\frac{dw}{dt}\Theta_0 + w^2\frac{d\mathfrak{w}_0}{dt}\mathfrak{U}_1'' = \\ &= \mathfrak{B}\sum\mathfrak{P} + w\frac{dw}{dt}\Theta_0 + w^2\frac{d\mathfrak{w}_0}{dt}\mathfrak{U}_1'',\end{aligned}\right.$$

(9) wo $\Theta_0 = \Theta - M[\mathfrak{w}_0\mathfrak{a}]^2$

(10) und $\mathfrak{U}_1'' = \mathfrak{U}'' - M[\mathfrak{a}[\mathfrak{w}_0\mathfrak{a}]]$

Setzen wir den Wert fur $\mathfrak{r}''$ aus (b) in (9) und (10) ein und berucksichtigen (24) Nr. 3, so bekommen wir

$$\Theta_0 = \sum m[\mathfrak{w}_0\mathfrak{r}']^2 = \mathfrak{w}_0\{\sum m(\mathfrak{r}'^2 - \mathfrak{r}'\cdot\mathfrak{r}')\}\mathfrak{w}_0 = \mathfrak{w}_0\mathsf{T}_1\mathfrak{w}_0, \tag{11}$$

$$\mathfrak{U}_1'' = \sum m[\mathfrak{r}'[\mathfrak{w}_0\mathfrak{r}']] = \mathfrak{w}_0\sum m(\mathfrak{r}'^2 - \mathfrak{r}'\ \mathfrak{r}') = \mathfrak{w}_0\mathsf{T}_1. \tag{12}$$

Näheres über den „Trägheitstensor" T_1 in Nr 7 Nach der Eulerschen Formel (c) in Nr. 2 ist

$$\frac{d\mathfrak{w}_0}{dt} = \frac{\mathrm{d}\mathfrak{w}_0}{\mathrm{d}t}. \tag{13}$$

D. h. aber: Ändert die Rotationsachse ihre Richtung im Raume, so ändert sich auch ihre Richtung relativ zum Korper und umgekehrt. Ist anderseits ihre Richtung gegen den Körper konstant, so ist sie es auch gegen das feste Koordinatensystem. Dieselben Schlüsse können wir auch für den Betrag w ziehen, denn nach der Eulerschen Formel ist auch

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dt} = \frac{\mathrm{d}\mathfrak{w}}{\mathrm{d}t}. \tag{14}$$

Wie (f) gilt, wenn wir den Punkt O_1 als Anfang des bewegten Kreuzes wählen, so muß eine ähnliche Gleichung gelten, wenn wir statt O_1 einen andern Punkt $\overline{O}_1$ wählen:

$$\mathfrak{v} = \overline{\mathfrak{V}}_1 + [\overline{\mathfrak{w}}\,\bar{\mathfrak{r}}'']. \tag{i}$$

Dabei geht $\bar{\mathfrak{r}}''$ von $\overline{O}_1$ nach m. Nach (f) muß dann aber

$$\overline{\mathfrak{V}}_1 = \mathfrak{V}_1 + [\mathfrak{w}(\mathfrak{r}'' - \bar{\mathfrak{r}}'')] \tag{k}$$

sein, weil $\mathfrak{r}'' - \bar{\mathfrak{r}}''$ der Vektor von O_1 nach $\overline{O}_1$ ist. Die Addition von (i) und (k) gibt

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{V}_1 + [\mathfrak{w}\,\mathfrak{r}''] + [(\overline{\mathfrak{w}} - \mathfrak{w})\bar{\mathfrak{r}}''].$$

Der Vergleich mit (f) zeigt, daß das letzte Glied verschwinden muß und zwar für jeden Punkt $\bar{\mathfrak{r}}''$. Das ist nur möglich, wenn

$$\overline{\mathfrak{w}} = \mathfrak{w}$$

ist. Der Vektor $\mathfrak{w}$ der Winkelgeschwindigkeit ist für alle Punkte O_1 eines starren Korpers derselbe.

Wie man sich leicht aus (6), (7) und (11), (12) überzeugen kann,

(16) ist $\Theta = \mathfrak{w}_0\,\mathfrak{U}''$, $\qquad \Theta_0 = \mathfrak{w}_0\,\mathfrak{U}_1''$,

und deshalb können wir statt (8) schreiben

$$\frac{dL}{dt} = \mathfrak{V}\sum\mathfrak{P} + w\,\frac{d\mathfrak{w}}{dt}\,\mathfrak{U}_1'' \tag{17}$$

oder infolge von (e) und (6)

$$\frac{dL}{dt} = \mathfrak{V}_1\sum\mathfrak{P} + M\,\frac{d\mathfrak{V}_1}{dt}\,[\mathfrak{w}\,\mathfrak{a}] + \frac{1}{2}\,\frac{dw^2\Theta}{dt}. \tag{17a}$$

(18) Setzen wir $\quad L' = \frac{1}{2}w^2\Theta = \frac{1}{2}w^2\mathfrak{w}_0\,\mathfrak{U}''$,

so bedeutet L', wie man aus (5) ersieht, die gesamte kinetische Energie des Körpers, wenn $\mathfrak{V}_1 = 0$ ist, d. h. wenn sich ein Punkt des Körpers in Ruhe befindet

Aus (f) erhalten wir wegen (63), (100) und (101) I

$$\text{rot}\,\mathfrak{v} = 2\,\mathfrak{w} \tag{19}$$

$$\text{oder} \qquad \mathfrak{w} = \tfrac{1}{2}\,\text{rot}\,\mathfrak{v}, \tag{19a}$$

da $\mathfrak{w}$ für den ganzen Körper konstant ist Deshalb läßt sich (f) auch schreiben

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{V}_1 + \tfrac{1}{2}\,[\text{rot}\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{r}''] = \mathfrak{V}_1 - \tfrac{1}{2}\,[\mathfrak{r}''\,\text{rot}\,\mathfrak{v}] \tag{20}$$

7. Das Trägheitsmoment. Bezeichnen wir mit x den Abstand eines Massenpunktes von der momentanen, durch den Koordinatenanfang des beweglichen Systems gehenden Rotationsachse, so erhalten wir statt (6)

$$\Theta = \sum m x^2. \tag{21}$$

Diese Größe Θ nennt man das Trägheitsmoment des Körpers für jene Achse. Wir wollen dieses Trägheitsmoment jetzt näher untersuchen.

Aus (11) folgt, daß Θ_0 wie $\mathfrak{w}$ eine von der Lage des beweglichen Koordinatensystems gegen den Körper unabhängige Größe ist und zwar gleich dem Trägheitsmoment für eine durch den Massenmittelpunkt des Körpers gehende Achse $\mathfrak{w}_0$ Infolgedessen berechnet sich wegen (9) das Trägheitsmoment Θ für eine durch einen beliebigen Punkt des Körpers gehende Achse $\mathfrak{w}_0$ aus

$$\Theta = \Theta_0 + M\,[\mathfrak{w}_0\,\mathfrak{a}]^2, \tag{22}$$

wo $\mathfrak{a}$ den Vektor vom Massenmittelpunkt nach diesem Punkt bedeutet Das zweite Glied wäre das Trägheitsmoment des Körpers für jene nicht durch den Massenmittelpunkt gehende Achse, wenn seine Gesamtmasse im Massenmittelpunkt konzentriert wäre

Wir wenden uns jetzt zum Vektor $\mathfrak{U}''$, dessen skalares Produkt mit $\mathfrak{w}_0$ nach (16) gleich Θ ist.

Denken wir uns, daß $\mathfrak{w}_0$ eine andere Richtung $\mathfrak{w}_0'$ erhalten hat, dann geht $\mathfrak{U}''$ in $\mathfrak{U}'''$ über, wo nach (7)

$$\mathfrak{U}''' = \sum m\,[\mathfrak{r}''\,[\mathfrak{w}_0'\,\mathfrak{r}'']] \tag{a}$$

ist Hieraus und aus (7) erhalten wir

$$\mathfrak{U}''\,\mathfrak{w}_0' = \mathfrak{U}'''\,\mathfrak{w}_0. \tag{b}$$

Da $\mathfrak{w}_0$ ein Einheitsvektor ist, so besagt (b) infolge von (212a) I, daß $\mathfrak{U}''$ ein ellipsoidaler Vektor (el. V.) ist. Das entsprechende Ellipsoid nennt man das (erste) Trägheitsellipsoid.

Infolge der Eigenschaften eines el. V. haben wir

$$\delta(\mathfrak{w}_0 \mathfrak{U}'') = \delta\Theta = 2\,\mathfrak{U}''\,\delta\mathfrak{w}_0, \tag{c}$$

d. h. fällt die Rotationsachse mit einer der Hauptachsen des Trägheitsellipsoids zusammen, so wird der entsprechende Wert des Trägheitsmomentes ein Maximum oder ein Minimum oder nimmt einen Sattelwert an.

Bezeichnen wir die Hauptwerte von $\mathfrak{U}''$ mit Θ_1, Θ_2, Θ_3 und die Grundvektoren längs den Hauptachsen mit $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$, so ist wegen Nr. 41 I

$$\mathfrak{U}''_x = \mathfrak{i}\,\Theta_1; \qquad \mathfrak{U}''_y = \mathfrak{j}\,\Theta_2; \qquad \mathfrak{U}''_z = \mathfrak{k}\,\Theta_3, \tag{d}$$

$$\text{woraus } \mathfrak{U}'' = \mathfrak{i}\,\mathfrak{w}_0 \cdot \mathfrak{i}\,\Theta_1 + \mathfrak{j}\,\mathfrak{w}_0 \cdot \mathfrak{j}\,\Theta_2 + \mathfrak{k}\,\mathfrak{w}_0\ \ \mathfrak{k}\,\Theta_3 \tag{23}$$
$$= \mathfrak{w}_0(\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{i}\,\Theta_1 + \mathfrak{j}\cdot\mathfrak{j}\,\Theta_2 + \mathfrak{k}\cdot\mathfrak{k}\,\Theta_3) = \mathfrak{w}_0 \mathrm{T}.$$

Die Gleichung des Ellipsoids ist

$$\frac{x^2}{\Theta_1^{\,2}} + \frac{y^2}{\Theta_2^{\,2}} + \frac{z^2}{\Theta_3^{\,2}} = 1. \tag{24}$$

Auf Grund von (215) und (216) Nr. 41 I ergibt sich aus (23) der entsprechende Tensor T durch Abspaltung des Faktors $\mathfrak{w}_0$, und statt (24) kann man schreiben: $\mathfrak{r}\,\mathrm{T}^{-2}\mathfrak{r} = 1$ oder eigentlich, indem man $\mathfrak{w}_0 = \mathrm{T}^{-1}\mathfrak{U}''$ in $\mathfrak{w}_0^{\,2} = 1$ einsetzt: $\mathfrak{U}''\,\mathrm{T}^{-2}\,\mathfrak{U}'' = 1$. Für den reziproken Tensor T^{-1} gilt $\mathrm{T}^{-1}\mathrm{T} = \mathrm{T}\mathrm{T}^{-1} = 1$. Die Transformation T^{-1} macht die Transformation T rückgängig: $\mathrm{T}^{-1}\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}$, wenn $\mathrm{T}\mathfrak{r} = \mathfrak{r}'$. Nach (18) ist

$$2\,L' = \mathfrak{w}\,\mathrm{T}\,\mathfrak{w}. \tag{18a}$$

Fällt $\mathfrak{w}_0$ mit einer der Hauptachsen zusammen, so folgt aus (23) und (16), daß das Trägheitsmoment gleich dem entsprechenden Hauptwert ist, weshalb wir für die Hauptwerte den Buchstaben Θ gebraucht haben.

Im allgemeinen ist $\mathfrak{U}''$ nicht mit $\mathfrak{w}_0$ gleichgerichtet, wie dies auch aus (7) leicht zu ersehen ist. Denn wir haben

$$\mathfrak{U}'' = \mathrm{T}\,\mathfrak{w}_0 = \mathfrak{w}_0 \sum m\mathfrak{r}''^2 - \sum m\mathfrak{r}'' \cdot \mathfrak{r}''\mathfrak{w}_0, \tag{e}$$

und nur wenn $\mathfrak{w}_0$ mit einer der Hauptachsen zusammenfällt, wird dies auch das zweite Glied in (e) tun. Aus diesem Grunde ist das Ellipsoid (24) nicht bequem zur Bestimmung des Trägheitsmomentes.

Man benutzt gewöhnlich ein anderes Ellipsoid und zwar ein durch folgende Gleichung definiertes

$$(25)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$(26)\quad \text{wo}\qquad a = \frac{1}{\sqrt{\Theta_1}};\quad b = \frac{1}{\sqrt{\Theta_2}};\quad c = \frac{1}{\sqrt{\Theta_3}},$$

also
$$\Theta_1 x^2 + \Theta_2 y^2 + \Theta_3 z^2 = 1,$$

was gestattet ist, da infolge von (21) stets Θ_1, Θ_2, $\Theta_3 > 0$ sein werden. Die Hauptachsen dieses Ellipsoids fallen mit denen von (24) zusammen. Es ist dies das sogenannte 2 Trägheitsellipsoid Statt (25) kann man auch kurz $\mathfrak{r}\,\mathrm{T}\,\mathfrak{r} = 1$ schreiben

Aus (16) und (23) folgt

$$(\mathrm{f})\qquad \Theta = (\mathfrak{i}\mathfrak{w}_0)^2\,\Theta_1 + (\mathfrak{j}\mathfrak{w}_0)^2\,\Theta_2 + (\mathfrak{k}\mathfrak{w}_0)^2\,\Theta_3 = \mathfrak{w}_0\,\mathrm{T}\,\mathfrak{w}_0$$

Bekanntlich bestimmt sich ein Radiusvektor r des Ellipsoids (25), der mit der Richtung von $\mathfrak{w}_0$ zusammenfällt, aus der Gleichung

$$\frac{1}{r^2} = \frac{(\mathfrak{i}\mathfrak{w}_0)^2}{a^2} + \frac{(\mathfrak{j}\mathfrak{w}_0)^2}{b^2} + \frac{(\mathfrak{k}\mathfrak{w}_0)^2}{c^2} = \mathfrak{w}_0\,\mathrm{T}\,\mathfrak{w}_0.$$

Hieraus und aus (26) und (f) folgt

$$(27)\qquad \frac{1}{r^2} = \Theta \qquad \text{oder} \qquad r = \frac{1}{\sqrt{\Theta}}.$$

Demnach bestimmt der mit $\mathfrak{w}_0$ gleichgerichtete Radiusvektor des Ellipsoids (25) durch sein reziprokes Quadrat das entsprechende Trägheitsmoment. Fällt der Mittelpunkt dieses Ellipsoids mit dem Massenmittelpunkt zusammen, so wird es als Zentralellipsoid bezeichnet

Aus (27) folgt sofort

$$(\mathrm{g})\qquad \frac{1}{2} = \frac{\Theta r^2}{2}.$$

Beim Vergleich von (g) mit (18) sehen wir, daß bei ruhendem Mittelpunkt des Ellipsoids (25) die kinetische Energie L' fur alle möglichen Richtungen von $\mathfrak{w}$ einen konstanten Wert behält, solange sich der Betrag von $\mathfrak{w}$, d. h. w im selben Verhaltnis wie r andert.

Wir wollen jetzt noch eine sehr wichtige Eigenschaft des Ellipsoids (25) ableiten

Wenn man die linke Seite von (25)

$$\mathfrak{r}\,\mathrm{T}\,\mathfrak{r} = 2\varphi$$

$$(\mathrm{h})\quad \text{setzt, so wird}\quad \nabla\varphi = \mathrm{T}\,\mathfrak{r} = r\,\mathrm{T}\,\mathfrak{r}_0 = r\,\mathfrak{U}''$$

und $\mathfrak{r}\nabla\varphi = 2\varphi$ Geht $\mathfrak{R}$ (Fig. 4) vom Mittelpunkt des Ellipsoids $2\varphi = 1$ zu einem Punkt einer Berührungsebene und $\mathfrak{r}$ vom Mittel-

punkt zum Berührungspunkt, so ist der Vektor $\mathfrak{R} - \mathfrak{r}$ parallel der Berührungsebene, folglich senkrecht zu dem Vektor $\nabla\varphi$ im Berührungspunkt, weil doch die Oberfläche des Ellipsoids eine Fläche $\varphi =$ konst ist und weil $\nabla\varphi$ in jedem Punkt eines beliebigen skalaren Feldes φ auf der durch den Punkt gehenden Fläche $\varphi =$ konst senkrecht steht; also:

Fig 4

$(\mathfrak{R} - \mathfrak{r})\,\nabla\varphi = 0$ oder

(i) $\mathfrak{R}\nabla\varphi = \mathfrak{r}\nabla\varphi = 2\varphi = 1.$

(Gleichung der Berührungsebene.) Unter den Vektoren $\mathfrak{R}$ ist einer, $\mathfrak{N}$, parallel zu $\nabla\varphi$ Er geht vom Mittelpunkt senkrecht nach der Berührungsebene:

(k) $$\mathfrak{N} = \lambda\nabla\varphi = \lambda\,\mathrm{T}\,\mathfrak{r} = \lambda r\,\mathfrak{U}''.$$

Wahlt man also $\mathfrak{w}_0$ parallel zum Ortsvektor $\mathfrak{r}$ des Berührungspunktes, so zeigt die Normale $\mathfrak{N}$ der Berührungsebene die Richtung des zugehörigen Vektors $\mathfrak{U}''$ an (Fig 4.)

Der Betrag $N = \lambda r U''$ von $\mathfrak{N}$ ergibt sich daraus, daß nach (i), wenn man darin $\mathfrak{N}$ aus (k) für $\mathfrak{R}$ einsetzt, $\lambda(\nabla\varphi)^2 = 1$ sein muß oder nach (h)

(l) $$\lambda r^2 U''^2 = N r U'' = 1.$$

(28) Demnach $$\mathfrak{N} = \frac{\mathfrak{U}''}{r\,\mathfrak{U}''^2} = \frac{\mathfrak{U}''_0}{r\,U''}$$

(28a) und $$\mathfrak{U}'' = \mathrm{T}\,\mathfrak{r}_0 = \frac{\mathfrak{N}}{r\,\mathfrak{N}^2} = \frac{\mathfrak{N}_0}{r N} = \frac{\mathfrak{N}_0}{r\,\mathfrak{N}_0\,\mathfrak{r}}.$$

8. Gleichgewichtsbedingungen eines starren Körpers. Ein starrer Körper befinde sich unter dem Einfluß von äußeren Kräften andauernd in Ruhe. Welchen Bedingungen müssen in diesem Fall die äußeren Krafte genügen?

Der Körper erfahre eine kleine Verlagerung. Bezeichnen wir mit $\delta\mathfrak{r}$ die entsprechende Verschiebung eines Massenpunktes, so wird die Arbeit, die in diesem Fall von den äußeren Kraften geleistet wird, $A = \sum \mathfrak{P}\,\delta\mathfrak{r}$ sein

Da aber die Arbeit der inneren Kräfte eines starren Körpers gleich Null ist, so folgt aus der Energiegleichung (35) Nr. 4, daß A gleich ist der Vermehrung der kinetischen Energie L des Körpers: $A = \delta L$ Gerät der Körper wirklich in Bewegung, so ist δL gewiß positiv. Denn die Energie L war ja anfangs Null, da der Körper ruhte, und negativ kann sie nicht werden. Folglich wird die Verlagerung $\delta \mathfrak{r}_n$ unter der Einwirkung der Kräfte $\mathfrak{P}_n$ nur dann eintreten, wenn dabei $A > 0$ ausfällt. Ergibt sich aber $A = 0$, so wird jene Verlagerung $\delta \mathfrak{r}_n$ keinesfalls eintreten Ebenso wird keine virtuelle, d. h. mit der Starrheit verträgliche Verlagerung $\delta \mathfrak{r}_n$ eintreten, wenn für jede einzelne dieser Verlagerungen $A = 0$ wird. Andere als virtuelle Verlagerungen werden schon durch die Starrheit verhindert Die Ruhe des starren Körpers ist also gesichert, wenn die Arbeit der äußeren Kräfte für alle virtuellen Verrückungen verschwindet:

$$\sum \mathfrak{P} \delta \mathfrak{r} = 0. \tag{29}$$

Diese Gleichung wird das Prinzip der virtuellen Verschiebungen genannt.

Für $\delta \mathfrak{r}$ können wir im Anschluß an (13) Nr. 2 oder (f) Nr 6, da relative Verschiebungen nicht vorkommen, schreiben

$$\delta \mathfrak{r} = \delta \mathfrak{R}_1 + [\delta \mathfrak{z}\, \mathfrak{r}''], \tag{a}$$

wo $\delta \mathfrak{z}$ einen Vektor bedeutet, dessen Richtung mit $\mathfrak{w}_0$ zusammenfällt und dessen Betrag einen sehr kleinen Winkel darstellt $\delta \mathfrak{z}$ ist ebenso wie $\mathfrak{w}_0$ konstant für den ganzen Körper.

Infolge von (a) erhalten wir statt (29)

$$\delta \mathfrak{R}_1 \sum \mathfrak{P} + \delta \mathfrak{z} \sum [\mathfrak{r}'' \mathfrak{P}] = 0 \tag{b}$$

Da aber $\delta \mathfrak{R}_1$ und $\delta \mathfrak{z}$ beliebig und unabhängig voneinander sind, so folgt aus (b)

$$\sum \mathfrak{P} = 0; \qquad \sum [\mathfrak{r}'' \mathfrak{P}] = 0 \tag{30}$$

Diesen Bedingungen müssen die äußeren Kräfte im Falle des Gleichgewichtes eines starren Körpers genügen.

Zwei verschiedene Kräftesysteme $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ versetzen einen starren Körper in dieselbe Bewegung, wenn

$$\sum (\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2) = 0 \qquad \text{und} \qquad \sum [\mathfrak{r}(\mathfrak{P}_1 - \mathfrak{P}_2)] = 0$$

ist, wenn also beide Systeme auf dasselbe Vektorenpaar $\sum \mathfrak{P} = \mathfrak{K}$ und $\sum [\mathfrak{r}\mathfrak{P}] = \mathfrak{M}$ führen. Dieses bildet eine Größe neuer Art mit sechs Bestimmungszahlen, eine „Schraube“ (die aber nichts mit

einem Tensor zu tun hat) Auch die Geschwindigkeit eines starren Körpers ist eine solche Schraube, bestimmt durch die beiden Vektoren $\mathfrak{w}$ und $\mathfrak{B}_1$ in (f) Nr 6.

Man kann
$$\mathfrak{M} = p\,\mathfrak{K} + [\mathfrak{q}\,\mathfrak{K}]$$
setzen. Dabei ist $p = \frac{\mathfrak{K}\,\mathfrak{M}}{\mathfrak{K}^2}$, $\quad \mathfrak{q} = \frac{[\mathfrak{K}\,\mathfrak{M}]}{\mathfrak{K}^2} + \lambda\,\mathfrak{K}$

Wenn sich λ ändert, durchläuft die Spitze des Pfeils $\mathfrak{q}$ die sogenannte Zentralachse der Schraube p heißt der Parameter der Schraube und bedeutet eine Länge.[1])

Entsprechend (19) und (20) können wir auch schreiben

$$\text{(31)} \qquad \delta\mathfrak{z} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\delta\mathfrak{r}$$

$$\text{(32)} \quad \text{und} \qquad \delta\mathfrak{r} = \delta\,\mathfrak{R}_1 + \tfrac{1}{2}\,[\mathrm{rot}\,\delta\mathfrak{r}\;\mathfrak{r}'']$$

9. Bewegung eines starren Körpers bei Abwesenheit von äußeren Kräften. In diesem Fall sind alle $\mathfrak{P} = 0$. Legen wir den Koordinatenanfang des beweglichen Systems in den Massenmittelpunkt ($\mathfrak{a} = 0$), so ist wegen (c) Nr. 6 und (3)

$$\text{(a)} \qquad \frac{d\,\mathfrak{B}}{dt} = M\,\frac{d\,\mathfrak{B}}{dt} = 0$$

$$\text{(b)} \quad \text{oder} \qquad \mathfrak{B} = \text{konst.}$$

$$\text{(c)} \quad \text{und wegen (9) und (17a)} \quad \frac{d w^2\,\Theta_0}{2\,dt} = 0$$

oder infolge von (18)

$$\text{(d)} \qquad L_0' = \tfrac{1}{2}\,w^2\,\Theta_0 = \text{konst.}$$

Aus (b) ersehen wir, daß sich der Massenmittelpunkt des Körpers mit einer nach Richtung und Betrag konstanten Geschwindigkeit bewegen wird

Da der Koordinatenanfang des beweglichen Systems mit dem Massenmittelpunkt zusammenfallt, so geht das Trägheitsellipsoid (25) in das Zentralellipsoid über. Aus (d) ergibt sich nach (g) Nr. 7 und den folgenden Erörterungen, daß bei konstantem Verhältnis $w : r$ die Energie L_0' konstant bleibt. Dieses Verhältnis ist:

$$\text{(e)} \qquad \frac{w}{r} = \sqrt{2\,L_0'},$$

1) Näheres über Schrauben bei R v Mises, Z. f angew. Math u Mech 4, 155, 1924 — Siehe auch E. Budde, Mechanik, Bd 2, und G. Hamel, Elementare Mechanik, S 195 u f.

wo r den Radiusvektor des Zentralellipsoids bedeutet, der mit der augenblicklichen Richtung von $\mathfrak{w}_0$ zusammenfällt. Daher ist auch

(e′) $$\mathfrak{w} = \mathfrak{r}\sqrt{2L_0'}.$$

Aus (28) und (e) folgt

(e″) $$\mathfrak{R} = \frac{\sqrt{2L_0'}}{w\,U''}\,\mathfrak{U}_0''.$$

Aus (4) erhalten wir $\mathfrak{U} = M[\mathfrak{R}\mathfrak{B}] + \sum[\mathfrak{r}' m[\mathfrak{w}\mathfrak{r}']]$ und deshalb nach (7)

(f) $$\mathfrak{U} = M[\mathfrak{R}\mathfrak{B}] + w\mathfrak{U}_1'' = M[\mathfrak{R}\mathfrak{B}] + \mathsf{T}_1\mathfrak{w}.$$

Wegen (32) und (34) Nr. 4 folgt hieraus

(g) $$\mathfrak{U} = \text{konst}, \quad w\mathfrak{U}_1'' = \text{konst}$$

(16), (d) und (23) liefern

(h) $$w^2\mathfrak{w}_0\mathfrak{U}_1'' = w\mathfrak{U}_1''\mathfrak{w} = \mathfrak{w}\mathsf{T}_1\mathfrak{w} = 2L_0' = \text{konst}.$$

Da $w\mathfrak{U}_1''$ und das skalare Produkt $w\mathfrak{U}_1''\mathfrak{w}$ konstant sind, so folgt hieraus, daß die Projektion von $\mathfrak{w}$ auf die Richtung von $\mathfrak{U}_1''$ auch konstant sein muß, d. h

$$w \cos(\mathfrak{w}_0\mathfrak{U}_1'') = \text{konst}$$

oder wegen (l) Nr. 7 und (e)

(i) $$N = r\cos(\mathfrak{w}_0\mathfrak{U}_1'') = \text{konst}$$

Nach (e″) steht auch der Vektor $\mathfrak{R}$ im Raum fest

Wir legen jetzt an das Zentralellipsoid, das wir uns fest mit dem Körper verbunden denken müssen, eine Tangentialebene E, senkrecht zu $\mathfrak{U}_1''$.

Da wir aus Nr. 7 wissen, daß diese Ebene das Zentralellipsoid im Endpunkt von r berührt, so lehrt (i), daß der Abstand N des Mittelpunktes dieses Ellipsoids von der Ebene E konstant bleiben wird. Die Ebene E, die Normale N und der Mittelpunkt des Ellipsoids bewegen sich demnach mit einer gemeinsamen konstanten Geschwindigkeit $\mathfrak{B}$, ohne sich gegeneinander zu verrücken. Dies alles liest man auch sofort aus (e″) ab. Das Ellipsoid aber und der Körper können sich relativ zur Ebene E bewegen, indem sie sich um den Mittelpunkt drehen. Dabei muß aber das Ellipsoid nach (i) diese Ebene ständig berühren. Wir wollen diese Bewegung näher untersuchen.

Wir denken uns für einen Augenblick zusammen mit dem Körper bewegt und lassen die Achsen des beweglichen Koordinatensystems

mit den Hauptachsen des Zentralellipsoids zusammenfallen. Dann ist wegen (13) und (14)

$$\text{(k)} \qquad \frac{dw}{dt} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}.$$

Ist demnach $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ nicht Null, so ändert sich auch r infolge von (e), d. h. der Berührungspunkt der Ebene E wandert auf dem Zentralellipsoid. Es wird also, mit anderen Worten, das Ellipsoid auf der Ebene E rollen, wobei der Mittelpunkt relativ zur Ebene fest ist. Hierbei beschreibt der Berührungspunkt auf der Ebene E eine Kurve, die Herpolodie, und auf dem Ellipsoid eine Kurve, die als die Polodie bezeichnet wird.

Aus (h) und (g) erhalten wir

$$w\,\mathfrak{U}_1''\,\frac{d\mathfrak{w}}{dt} = 0$$

oder

$$w\,\mathfrak{U}_1''\,\mathfrak{w}_0\,\frac{dw}{dt} + w^2\,\mathfrak{U}_1''\,\frac{d\mathfrak{w}_0}{dt} = 0$$

oder endlich wegen (d), (k), (13), (16), (18), (27)

$$\text{(l)} \qquad 2L_0'\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + w^3\,\mathfrak{U}_1''\,\frac{\mathrm{d}\mathfrak{w}_0}{\mathrm{d}t} = 0$$

Nehmen wir jetzt an, es sei

$$\text{(m)} \qquad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{dw}{dt} = 0,$$

(n) so liefert (l) $\qquad \mathfrak{U}_1''\,\frac{\mathrm{d}\mathfrak{w}_0}{\mathrm{d}t} = 0.$

Da aber $\mathfrak{U}_1''$ ein el. V. ist, so folgt aus (n) wegen Nr 42 I, daß in diesem Fall die Richtung der Drehungsachse $\mathfrak{w}_0$ mit $\mathfrak{U}_1''$ und mit einer der Achsen des Tensorellipsoids, hier also des Zentralellipsoids zusammenfällt. Deshalb wird auch $\mathfrak{w}_0$ eine feste Richtung im Raume haben. Die Herpolodie und Polodie schrumpfen zu einem Punkt und zwar zum Fußpunkt der Normale N zusammen. Da umgekehrt (m) aus (n) und (l) hervorgeht, so sehen wir, daß wenn $\mathfrak{w}_0$ mit einer der Achsen des Zentralellipsoids zusammenfällt, sich der Körper um eine im Raume feste Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit drehen wird.

Man bezeichnet deshalb die Achsen des Zentralellipsoids als freie Achsen.

10. Rotation eines starren Körpers um eine im Raume feste Achse unter Einwirkung von äußeren Kräften. Wir haben ge-

sehen, daß eine freie Achse des Korpers als Drehungsachse ihre Richtung im Raume beibehalt. Eine beliebige Drehungsachse dagegen andert ihre Lage im Körper und im Raum. Zwingen wir aber den Körper, sich um eine im Raume feste, zu dem Korper selbst aber beliebig orientierte Achse zu drehen, so müssen wir im allgemeinen auf den Körper gewisse Krafte $\mathfrak{P}_1$ einwirken lassen. Wir nehmen an, der Körper drehe sich mit Zapfen in festen Lagern. Dann sind $\mathfrak{P}_1$ die Kräfte, die von den Lagern auf den Körper ausgeübt werden.

Wir wollen diesen Fall näher untersuchen und außerdem voraussetzen, daß auf den Korper noch beliebige Kräfte $\mathfrak{P}_2$ wirken. Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß sich der Körper längs der Achse nicht verschieben kann.

Wir lassen den Anfang des beweglichen und den des festen Koordinatensystems zusammenfallen und legen diesen gemeinsamen Koordinatenanfang in die feste Achse. Dann ist

(a) $$\mathfrak{B}_1 = 0, \quad \mathfrak{R}_1 = 0$$

(b) Aus (2) folgt $$\mathfrak{B} = M[\mathfrak{w}\mathfrak{a}],$$

(c) aus (5) $$L = \frac{1}{2} w^2 \Theta = \frac{w \quad \mathfrak{w}\mathfrak{U}''}{2} = \frac{\mathfrak{w} w \mathfrak{U}''}{2} = \frac{\mathfrak{w}\mathrm{T}\mathfrak{w}}{2}$$

und aus (4) und (7) und (a)

(d) $$\mathfrak{U} = w\mathfrak{U}'' = \mathrm{T}\mathfrak{w} = w\mathrm{T}\mathfrak{w}_0$$

Wegen $\frac{\mathrm{d}\mathrm{T}}{\mathrm{d}t} = 0$ ist nach (c) Nr. 2

$$\frac{d\mathrm{T}\mathfrak{w}}{dt} = [\mathfrak{w}(\mathrm{T}\mathfrak{w})] + \mathrm{T}\frac{\mathrm{d}\mathfrak{w}}{\mathrm{d}t}.$$

Es ist aber

$$w\mathfrak{U}'' = \sum m[\mathfrak{r}''[\mathfrak{w}\mathfrak{r}'']] = \sum m\mathfrak{w}\cdot\mathfrak{r}''^2 - \sum m\mathfrak{r}''\cdot\mathfrak{w}\mathfrak{r}''$$

und infolge von (d) Nr. 2 und (a) Nr 6

$$\frac{dw\mathfrak{U}''}{dt} = \sum m\frac{d\mathfrak{w}}{dt}\cdot\mathfrak{r}''^2 - \sum m[\mathfrak{w}\mathfrak{r}''] \quad \mathfrak{w}\mathfrak{r}'' - \sum m\mathfrak{r}''\cdot\frac{\mathfrak{r}''d\mathfrak{w}}{dt}$$

oder wegen (7), sowie (13) Nr. 2 und (a) Nr 6

(e) $$\frac{dw\mathfrak{U}''}{dt} = \frac{d\mathfrak{U}}{dt} = \frac{\mathrm{d}w\mathfrak{U}''}{\mathrm{d}t} + w^2[\mathfrak{w}_0\mathfrak{U}''],$$

da doch die Beziehung (14) $\frac{\mathrm{d}\mathfrak{w}}{\mathrm{d}t} = \frac{d\mathfrak{w}}{dt}$

gilt Weil aber die Drehungsachse fest, d h

(f) $$\frac{d\mathfrak{w}_0}{dt} = \frac{\mathrm{d}\mathfrak{w}_0}{\mathrm{d}t} = 0$$

ist, so ergibt sich hieraus nach (7)

(g) $$\frac{\mathrm{d}\mathfrak{U}''}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Hieraus und aus (e) und (32) Nr. 4 erhalten wir

(h) $$\mathfrak{U}''\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + w^2[\mathfrak{w}_0\mathfrak{U}''] = \sum[\mathfrak{r}\mathfrak{P}_1] + \sum[\mathfrak{r}\mathfrak{P}_2]$$

und nach skalarer Multiplikation von (h) mit $\mathfrak{w} = w\mathfrak{w}_0$, wegen (1) und (16)

(i) $$\frac{dL}{dt} = w\mathfrak{U}''\mathfrak{w}_0\frac{dw}{dt} = w\,\Theta\frac{dw}{dt} = \mathfrak{w}\sum[\mathfrak{r}\mathfrak{P}_1] + \mathfrak{w}\sum[\mathfrak{r}\mathfrak{P}_2],$$

(k) woraus $$\Theta\frac{dw}{dt} = \mathfrak{w}_0\sum[\mathfrak{r}\mathfrak{P}_1] + \mathfrak{w}_0\sum[\mathfrak{r}\mathfrak{P}_2]$$

Anderseits ist wegen (c)

(l) $$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dw\mathfrak{w}\mathfrak{U}''}{dt} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}w\mathfrak{w}\mathfrak{U}''}{\mathrm{d}t},$$

was, wie leicht zu beweisen, mit (i) identisch ist.

Aus (b), (f) und (3) erhalten wir weiter

(m) $$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = M[\mathfrak{w}_0\mathfrak{a}]\frac{dw}{dt} + M[\mathfrak{w}[\mathfrak{w}\mathfrak{a}]] = \sum\mathfrak{P}_1 + \sum\mathfrak{P}_2.$$

Wir führen jetzt die Bezeichnungen

(n) $$\mathfrak{K} = -\sum\mathfrak{P}_1$$

(p) $$\mathfrak{M} = -\sum[\mathfrak{r}\mathfrak{P}_1]$$

ein. Es bedeuten dann $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{M}$ nichts anderes, als die gesamte Kraft und das gesamte Moment der Kräfte, die vom Körper auf die Lager ausgeübt werden.

Sind die äußeren Krafte $\mathfrak{P}_2$ gegeben, was wir annehmen wollen, so berechnen sich $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{M}$ aus (m) und (h) wie folgt:

(q) $$\mathfrak{K} = \sum\mathfrak{P}_2 - M[\mathfrak{w}_0\mathfrak{a}]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} - M[\mathfrak{w}[\mathfrak{w}\mathfrak{a}]],$$

(r) $$\mathfrak{M} = \sum[\mathfrak{r}\mathfrak{P}_2] - \mathfrak{U}''\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} - w^2[\mathfrak{w}_0\mathfrak{U}'']$$

Wir können annehmen, daß die Kräfte $\mathfrak{P}_1$ ihren Angriffspunkt auf der Drehungsachse selbst haben. Dann fällt die Richtung von $\mathfrak{r}$ im ersten Glied der rechten Seite von (k) mit $\mathfrak{w}_0$ zusammen, und dieses Glied verschwindet deshalb Statt (k) schreiben wir demnach

(s) $$\Theta \frac{d w}{d t} = \mathfrak{w}_0 \sum [\mathfrak{r} \mathfrak{P}_2]$$

Wir wollen die Gleichungen (q), (r) und (s) für folgenden Spezialfall untersuchen. Es soll sein

(t) $$\sum \mathfrak{P}_2 = 0$$

(u) und $\sum [\mathfrak{r} \mathfrak{P}_2]$ gleichgerichtet mit $\mathfrak{w}_0$.

Diese letzte Bedingung sagt aus, daß die äußeren Kräfte $\mathfrak{P}_2$ den Körper zu drehen bestrebt sind um die Drehungsachse im Sinne des Uhrzeigers, wenn man längs $\mathfrak{w}_0$ blickt, und daß sie kein Moment auf die Lager ausüben Die Bedingung (t) ergibt, daß die Kräfte $\mathfrak{P}_2$ sich im Gleichgewicht befinden und demnach kein Bestreben vorhanden sein wird, den Körper parallel zu sich selbst nach irgendwelcher Richtung zu verschieben

Infolge von (u) und (s) können wir schreiben — vgl (i) —

$$\mathfrak{w}_0 \Theta \frac{d w}{d t} = \mathfrak{w}_0 \cdot \mathfrak{w}_0 \mathfrak{U}'' \frac{d w}{d t} = \sum [\mathfrak{r} \mathfrak{P}_2].$$

Hieraus und aus (r) folgt dann

(v) $$\mathfrak{M} = (\mathfrak{w}_0 \cdot \mathfrak{w}_0 \mathfrak{U}'' - \mathfrak{U}'') \frac{d w}{d t} - w^2 [\mathfrak{w}_0 \mathfrak{U}''] =$$
$$= [\mathfrak{w}_0 [\mathfrak{w}_0 \mathfrak{U}'']] \frac{d w}{d t} - w^2 [\mathfrak{w}_0 \mathfrak{U}'']$$

und aus (t) und (q)

(w) $$\mathfrak{K} = - M [\mathfrak{w}_0 \mathfrak{a}] \frac{d w}{d t} - M [\mathfrak{w} [\mathfrak{w} \mathfrak{a}]]$$

Aus (g) ersehen wir, daß der Vektor $\mathfrak{U}''$ zusammen mit dem Körper rotiert Daraus ergibt sich wegen (v), daß auch das Moment $\mathfrak{M}$ mit dem Körper rotiert, was ein Rütteln der Lager hervorruft. Zugleich aber rotiert auch $\mathfrak{a}$ und infolgedessen auch $\mathfrak{K}$ mit dem Körper, wodurch ein Druck von veränderlicher Richtung auf die Lager entsteht.

Wie man sich von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{M}$ befreien kann, ersehen wir sofort aus (w) und (v) Wir müssen, um $\mathfrak{K}$ zum Verschwinden zu bringen, den Massenmittelpunkt in die Drehungsachse bringen. Da $\mathfrak{a}$ dann mit $\mathfrak{w}_0$ gleichgerichtet ist, so wird $\mathfrak{K} = 0$ Wir wollen dies voraus-

setzen und zur Vereinfachung der Rechnung außerdem annehmen, daß der Koordinatenanfang unseres Achsensystems mit dem Massenmittelpunkt zusammenfällt. Es geht dann $\mathfrak{U}''$ in $\mathfrak{U}_1''$ uber, und wir erhalten statt (v)

$$\mathfrak{M} = [\mathfrak{w}_0[\mathfrak{w}_0\mathfrak{U}_1'']]\frac{dw}{dt} - w^2[\mathfrak{w}_0\mathfrak{U}_1'']. \tag{x}$$

Um endlich auch $\mathfrak{M}$ zum Verschwinden zu bringen, brauchen wir nur $\mathfrak{w}_0$ in (x) gleichgerichtet mit $\mathfrak{U}_1''$ zu machen. Dazu müssen wir nach Nr. 9 die Drehungsachse mit einer der freien Achsen des Korpers zusammenfallen lassen. Nehmen wir auch dies als erfüllt an, so werden die Lager keine Wirkung mehr vom Körper aus erfahren, und der Körper selbst kann als ein freier angesehen werden, auf den außere Kräfte wirken, die den Bedingungen (t) und (u) genügen

III. Elastische Körper.

11. Allgemeine Beziehungen. Wir haben bis jetzt nur starre Körper betrachtet, d h. solche, bei denen der Definition nach keine relativen Verschiebungen der einzelnen Teile gegeneinander vorkommen. In Wirklichkeit wird aber unter dem Einfluß von außeren Kraften stets eine gewisse Relativverschiebung entstehen, die ihrerseits elastische Krafte hervorruft, die den äußeren Kräften entgegenwirken.

Wir denken uns einen Körper unter dem Einfluß von äußeren Kräften. Dann erleidet er gewisse Deformationen Wir wollen voraussetzen, daß hierbei der Korper nicht zerreißt, sondern standig ein Kontinuum bildet.

Wir zerschneiden jetzt den Korper durch eine Fläche in zwei Teile und entfernen den einen Teil. Stellen wir die Forderung, daß hierbei der Zustand des anderen Teiles nicht geändert werden soll, so müssen wir an diesem Teil auf der Schnittfläche gewisse Oberflächenkräfte wirken lassen, die genau denen entsprechen, die vom ersten Teil aus wirkten, als der Körper noch nicht zerteilt war Hieraus schließen wir, daß wenn wir uns in einem deformierten Körper ein Flächenelement df mit der auf der *positiven* Seite von df wegweisenden Normale $\mathfrak{n}$ denken, auf seine beiden Seiten gewisse Oberflachenkräfte wirken werden. Nehmen wir jetzt das Reaktionsprinzip als erfüllt an, so müssen die auf beiden Seiten von df wirkenden Kräfte gleich und entgegengesetzt sein

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{P}df$ die Kraft, mit der der auf der *positiven* Seite von df gelegene Teil des Korpers auf df wirkt Es ist dem-

nach $\mathfrak{P}$ die auf die Flächeneinheit wirkende Kraft; sie fällt im allgemeinen nicht mit $\mathfrak{n}$ zusammen Aus der Definition von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{n}$ folgt, daß wenn $\mathfrak{P}\mathfrak{n}$ negativ ist, wir einen Druck haben und im entgegengesetzten Fall einen Zug Darauf achte man stets im folgenden Die Kraft $\mathfrak{P}$ wird gewohnlich als Spannung bezeichnet

Aus dem zu betrachtenden Körper denken wir ein Volumenelement dv ausgeschnitten. Dieses Volumenelement wollen wir als einen Massenpunkt ansehen und auf ihn die Gleichungen des vorigen Kapitels anwenden

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit, mit ϱ die Dichte dieses Volumenelementes, mit $\varrho\mathfrak{G}dv$ die auf sein Inneres wirkende Kraft, die wir, wie z. B. die Schwerkraft, proportional der Dichte voraussetzen, so erhalten wir aus (1) Nr. 1

$$\text{(a)} \qquad \varrho\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\cdot dv = \varrho\mathfrak{G}dv + d\mathfrak{A},$$

wo $d\mathfrak{A}$ die Kraft darstellt, die von dem das Element dv umringenden Teil des Körpers herrührt. Da $\mathfrak{G}$ nicht so durch die Nachbarschaft auf dv übertragen wird, so ist $\mathfrak{G}$ als eine Fernkraft anzusehen

Bedeutet F_1 die Oberfläche von dv, so ist nach dem Vorhergehenden

$$\text{(b)} \qquad d\mathfrak{A} = \int_{F_1}\mathfrak{P}df$$

$$\text{(c)} \quad \text{und deshalb} \quad \varrho\frac{d\mathfrak{v}}{dt}dv = \varrho\mathfrak{G}dv + \int_{F_1}\mathfrak{P}df.$$

Da $\varrho\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$ und $\varrho\mathfrak{G}$ endlich, dv aber klein von dritter Ordnung ist, so folgt aus (c), daß das Integral (b) mindestens von derselben Ordnung sein muß Teilen wir deshalb (c) durch dv, gehen zur Grenze $dv = 0$ über und führen die Bezeichnung

$$\text{(1)} \qquad \mathfrak{R} = \frac{d\mathfrak{A}}{dv} = \frac{\int_{F_1}\mathfrak{P}df}{dv}$$

ein, so erhalten wir statt (c)

$$\text{(2)} \qquad \varrho\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \varrho\mathfrak{G} + \mathfrak{R},$$

wo also $\mathfrak{R}$ die innere auf die Volumeneinheit wirkende Kraft bedeutet, hervorgerufen durch die elastischen Eigenschaften des Korpers

Multiplizieren wir (2) mit dv und integrieren über ein endliches Volumen V mit der Oberfläche F, so vernichten sich gegenseitig alle inneren Volumenkräfte $\mathfrak{K}$ nach (c) und dem Reaktionsprinzip, und es bleiben nur die außen auf die Oberfläche F wirkenden Kräfte $\mathfrak{P}$ übrig. D h. wir erhalten

$$\int_V \varrho \frac{d\mathfrak{v}}{dt}\, dv = \int_V \varrho \mathfrak{G}\, dv + \int_F \mathfrak{P}\, df. \tag{3}$$

Da hier rechts nur äußere Krafte vorkommen, so stimmt (3) vollständig mit (31) Nr. 4 überein und auch mit dem Reaktionsprinzip (30) Nr. 4.

Wir wollen jetzt der Kraft $\mathfrak{K}$ eine andere Form geben. Zu dem Zweck nehmen wir als Volumenelement dv einen kleinen Quader, dessen Kanten parallel den Achsen eines rechtwinkligen Achsenkreuzes sind. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}_x$, $\mathfrak{P}_y$, $\mathfrak{P}_z$ die Flachenkraft auf eine zur X-, Y-, Z-Achse senkrechte Flächeneinheit und nehmen als positive Normale zur Oberfläche von dv, wie gewöhnlich, die äußere an, so erhalten wir

$$\mathfrak{K} = \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{P}_z}{\partial z}. \tag{4}$$

Denn die Kraft, die auf das Element $dy\,dz$ wirkt, ist, da die Normale entgegengesetzt $\mathfrak{i}$ gerichtet ist, gleich $-\mathfrak{P}_x dy\,dz$, und die auf das gegenüberliegende Element wirkende Kraft ist

$$+\mathfrak{P}_x dy\,dz + \frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial x}\, dy\,dz\,dx$$

Die Summe beider Kräfte ergibt $+\frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial x}\, dx\,dy\,dz$. Ähnliche Werte erhalten wir für die anderen zwei Paare von Flächenelementen, woraus sich nach Summierung und Teilung mit dem Volumenelement $dv = dx\,dy\,dz$ der Ausdruck (4) ergibt.

12. Spannungen. Ein Vergleich von (4) mit (207) und (207a) Nr. 38 I zeigt uns, daß:

$$\mathfrak{K} = \operatorname{tr} \Phi \tag{4a}$$

ist, wobei der Spannungsaffinor

$$\Phi = \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{P}_x + \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{P}_y + \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{P}_z \qquad \text{ist.} \tag{5}$$

Hieraus und aus (1) erhalten wir wegen (207) Nr 38 I fur $\mathfrak{P}$ den Ausdruck:

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{i}\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{P}_x + \mathfrak{j}\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{P}_y + \mathfrak{k}\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{P}_z = \mathfrak{n}\Phi \tag{5a}$$

Es sei noch bemerkt, daß aus (57) I folgt:

$$\text{(a)} \qquad \int_V \mathfrak{i}\nabla \ \mathfrak{P}_x dv = \int_F \mathfrak{i}\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{P}_x df = \mathfrak{i}\int_F d\mathfrak{f}\cdot\mathfrak{i}\Phi \qquad \text{usw.}$$

Wir ziehen jetzt von einem Punkt M im Raum einen Radiusvektor $\mathfrak{r}$ bis zu einem bestimmten Volumenelement des Körpers. Multiplizieren wir (2) vektorisch mit $\mathfrak{r}dv$ und integrieren über das Volumen V, so erhalten wir, unter Berücksichtigung von (4), (5) und (a)

$$\text{(b)} \qquad \int_V \varrho\left[\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\mathfrak{r}\right]dv = \int_V \varrho\,[\mathfrak{G}\mathfrak{r}]\,dv + \int_F [\mathfrak{P}\mathfrak{r}]\,df - \int_V \{[\mathfrak{P}_x\mathfrak{i}] + [\mathfrak{P}_y\mathfrak{j}] + [\mathfrak{P}_z\mathfrak{k}]\}\,dv$$

Dies ergibt sich daraus, daß z B.

$$\left[\frac{\partial\mathfrak{P}_x}{\partial x}\mathfrak{r}\right] = \frac{\partial[\mathfrak{P}_x\mathfrak{r}]}{\partial x} - \left[\mathfrak{P}_x\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial x}\right] = \frac{\partial[\mathfrak{P}_x\mathfrak{r}]}{\partial x} - [\mathfrak{P}_x\mathfrak{i}]$$

ist. Wir brauchen deshalb nur in (a) $\mathfrak{P}_x$ durch $[\mathfrak{P}_x\mathfrak{r}]$ zu ersetzen, um (b) zu beweisen.

Aus (b) und (3) ist sofort ersichtlich, daß die Lage des Momentenpunktes M keine Rolle spielt. Denn nehmen wir einen anderen Momentenpunkt M_1 an, der um $\mathfrak{r}_2$ von M entfernt ist, so wird

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2$$

sein, wo $\mathfrak{r}_1$ den Radiusvektor von M_1 bis zum entsprechenden Volumenelement dv bedeutet. Setzen wir diesen Wert für $\mathfrak{r}$ in (b) ein, so können wir $\mathfrak{r}_2$ als Konstante vor das Integralzeichen ziehen. Es verschwinden dann aber nach (3) diese Teile der Integrale D. h wir können $\mathfrak{r}$ in (b) durch $\mathfrak{r}_1$ ersetzen oder mit anderen Worten einen beliebig gelegenen Momentenpunkt annehmen. Hierdurch ist unsere Behauptung bewiesen Einfacher folgt dies auch direkt aus (b), denn das letzte Integral ist unabhängig von $\mathfrak{r}$, daher muß dies auch die Summe der anderen drei Integrale sein.

Nehmen wir für die inneren elastischen Kräfte auch die zweite Bedingung des Reaktionsprinzips (30) Nr. 4 als gültig an, daß nämlich die Summe der Momente der inneren Kräfte verschwindet, so muß für die äußeren Kräfte die Gleichung (32) Nr 4 bestehen, d h. aber, es muß sein

$$\text{(6)} \qquad \int_V \varrho\left[\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\mathfrak{r}\right]\cdot dv = \int_V \varrho\,[\mathfrak{G}\mathfrak{r}]\,dv + \int_F [\mathfrak{P}\mathfrak{r}]\,df,$$

Hieraus und aus (b) erhalten wir, da V beliebig ist,

$$[\mathfrak{P}_x \mathfrak{i}] + [\mathfrak{P}_y \mathfrak{j}] + [\mathfrak{P}_z \mathfrak{k}] = 0 \tag{7}$$

Dies zusammen mit (5) ergibt auf Grund von Nr. 39 I, daß $\mathfrak{P}$ ein el. V. ist, wobei der Einheitsvektor $\mathfrak{r}_0$ durch $\mathfrak{n}$ ersetzt ist. Deshalb ist der Affinor Φ in (5) ein Tensor

Das entsprechende Ellipsoid nennt man Spannungsellipsoid.

Bezeichnen wir die Hauptweite von $\mathfrak{P}$ mit σ_1, σ_2, σ_3 und setzen

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{i}P_1 + \mathfrak{j}P_2 + \mathfrak{k}P_3, \tag{c}$$

wo die Grundvektoren mit den Hauptachsen zusammenfallend gedacht sind, so ist das Spannungsellipsoid gegeben durch die Gleichung

$$\left(\frac{P_1}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{P_2}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{P_3}{\sigma_3}\right)^2 = 1. \tag{8}$$

Aus (215) I ergibt sich ferner

$$\mathfrak{P} = \sigma_1 \mathfrak{i}\cdot\mathfrak{i}\mathfrak{n} + \sigma_2 \mathfrak{j}\;\mathfrak{j}\mathfrak{n} + \sigma_3 \mathfrak{k}\;\mathfrak{k}\mathfrak{n} = \Phi\mathfrak{n}. \tag{9}$$

Fällt $\mathfrak{n}$ mit einer der Hauptachsen zusammen, so ist $\mathfrak{P}$ normal zu df, während für andere Richtungen von $\mathfrak{n}$ die Spannung $\mathfrak{P}$ im allgemeinen schief zu df gerichtet sein wird

Man kann die Gleichung (8) des Spannungsellipsoids auch in einer von irgendwelchem Achsenkreuz unabhangigen Form schreiben:

$$\mathfrak{P}\Phi^{-2}\mathfrak{P} = 1 \tag{8a}$$

Man erhält sie, indem man $\mathfrak{n} = \Phi^{-1}\mathfrak{P}$ in $\mathfrak{n}^2 = 1$ einsetzt

Bedeutet $\mathfrak{N}$ die zu df normale und $\mathfrak{T}$ die tangentiale Spannung, so haben wir

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{P}\mathfrak{n} \tag{10}$$

(11) und

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{P} - \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{P}\mathfrak{n} = [\mathfrak{n}[\mathfrak{P}\mathfrak{n}]] \tag{11}$$

Aus der Eigenschaft von $\mathfrak{P}$, ein el. V. zu sein, ergibt sich, daß

$$\mathfrak{P}\mathfrak{n}' = \mathfrak{P}'\mathfrak{n}. \tag{d}$$

Ist z B $\mathfrak{n}'$ entgegengesetzt $\mathfrak{n}$ gerichtet, so folgt hieraus, daß $\mathfrak{P}'$ gleich und entgegengesetzt $\mathfrak{P}$ ist, d. h. aber, daß die auf die beiden Seiten von df wirkenden Spannungen gleich und entgegengesetzt sind, was mit dem im Anfang von Nr. **11** gesagten übereinstimmt

13. Die Energiegleichung für elastische Körper. Es bezeichne $d\mathfrak{a} = \mathfrak{v}\,dt$ die unendlich kleine Verruckung des Volumenelements während der Zeit dt. Multiplizieren wir (2) mit $d\mathfrak{a}\,dv$ und integrieren über das Volumen V, so erhalten wir wegen (4)

(a) $$\int_V dv \cdot dL = \int_V \varrho \mathfrak{G}\, d\mathfrak{a}\, dv + \int_F \mathfrak{P}\, d\mathfrak{a} \cdot df - \int_V A\, dv,$$

wo
$$L = \frac{\varrho \mathfrak{v}^2}{2}$$

die kinetische Energie der Volumeneinheit bedeutet, also dL ihre Änderung in der Zeit dt, und wo

(b) $$A = \mathfrak{P}_x \frac{\partial d\mathfrak{a}}{\partial x} + \mathfrak{P}_y \frac{\partial d\mathfrak{a}}{\partial y} + \mathfrak{P}_z \frac{\partial d\mathfrak{a}}{\partial z} = (\Phi \nabla)\, d\mathfrak{a} = \operatorname{div} (\Phi\, d\mathfrak{a})_\Phi$$

Es ist demnach $-A$ die Arbeit, die durch die inneren elastischen Kräfte pro Volumeneinheit bei der Verrückung geleistet wird.

Die Richtigkeit von (a) geht daraus hervor, daß z B.

$$\frac{\partial \mathfrak{P}_x}{\partial x}\, d\mathfrak{a} = \frac{\partial \mathfrak{P}_x d\mathfrak{a}}{\partial x} - \mathfrak{P}_x \frac{\partial d\mathfrak{a}}{\partial x}$$

ist und wegen (92) I

$$\int_V \frac{\partial \mathfrak{P}_x d\mathfrak{a}}{\partial x}\, dv = \mathrm{i} \int_V \nabla \cdot \mathfrak{P}_x d\mathfrak{a}\, dv = \int_F \mathrm{i}\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{P}_x d\mathfrak{a}\, df.$$

Auf Grund thermodynamischer Überlegungen nimmt man an, daß sich die Arbeit der elastischen Kräfte durch das Differential einer Funktion $-V$ darstellen läßt. Es ist deshalb

(c) $$A = d\,V$$

Die Funktion V bezeichnet man als das elastische Potential oder die innere Energie, beide pro Volumeneinheit

Statt (a) können wir demnach schreiben

(12) $$\int_V d(L + V)\, dv = \int_V \varrho \mathfrak{G}\, d\mathfrak{a}\, dv + \int_F \mathfrak{P}\, d\mathfrak{a}\, df.$$

Die Gleichung (a) entspricht der Gleichung (a) Nr. 4 und die Gleichung (12), die die Energiegleichung der elastischen Körper bildet, der Gleichung (35) Nr 4

Vernachlässigen wir die Arbeit der Volumenkräfte $\mathfrak{G}$ und bezeichnen mit $\mathfrak{x}$ die Geschwindigkeit auf der Oberfläche F, setzen also auf F

$$\mathfrak{x} = \frac{d\mathfrak{a}}{dt},$$ so ergibt (12)

(13) $$\frac{d}{dt} \int_V (L + V)\, dv = \int_F \mathfrak{P}\mathfrak{x}\, df = \int_F d\mathfrak{f} \Phi \mathfrak{x}.$$

Dieser Ausdruck läßt folgende Deutung zu: Es bedeutet die linke Seite die Vermehrung der gesamten Energie während der Zeiteinheit. Infolgedessen können wir $\mathfrak{P}\mathfrak{x}$ als die Geschwindigkeit auffassen, mit der die Energie in das Volumen V durch die Oberfläche F senkrecht zu dieser einströmt. Die Dichte des elastischen Energiestroms ist daher

$$\mathfrak{B} = - \Phi \mathfrak{x} \tag{13a}$$

14. Die Verrückungen und Verzerrungen in einem elastischen Körper. Bei der Bewegung eines nicht starren Körpers unter der Wirkung von äußeren Kräften werden seine einzelnen Teile, wie wir schon anfangs in Nr. 11 bemerkt haben, Relativverschiebungen erfahren, d. h. der Körper wird sich deformieren. Die Verrückungen der einzelnen Teile des Körpers aus ihrer Anfangslage werden demnach verschieden sein von denen, die stattgefunden haben würden, wenn der Körper ein starrer wäre. Wir wollen diese Verrückungen näher untersuchen.

Dazu denken wir uns den Körper in zwei Lagen. Beim Übergang von der ersten in die zweite Lage soll der Körper auch deformiert werden. Wir verbinden jeden Punkt des Körpers in der ersten Lage mit demselben Punkt des Körpers in der zweiten Lage. Diese Verbindungslinie fassen wir als Vektor $\mathfrak{a}$ auf mit der positiven Richtung von der ersten zur zweiten Lage des Körpers. Ordnen wir jedem Punkt des Körpers in der ersten Lage den entsprechenden Vektor $\mathfrak{a}$ zu, so bildet der Körper ein Feld des Vektors $\mathfrak{a}$. Anderseits können wir auch jedem Punkt des Körpers in der zweiten Lage den Vektor $\mathfrak{a}$ zuordnen und in dieser Lage den Körper als Feld des Vektors $\mathfrak{a}$ betrachten. Grundsätzlich liegt hier kein Unterschied vor. Wir wollen aber, wie üblich, uns an die erste Vorstellung halten, also die erste Lage des Körpers als Feld des Vektors $\mathfrak{a}$ auffassen.

Da wir in Nr. 11 angenommen haben, daß der Körper bei der Verformung ständig ein Kontinuum bilden soll, so muß $\mathfrak{a}$ stetig und endlich sein. Greifen wir deshalb einen Punkt P des Körpers heraus, so können wir $\mathfrak{a}$ um den Punkt P herum innerhalb kleiner Entfernungen $\mathfrak{r}$ mit Hilfe von (104) 16 I und Nr. 43 I darstellen.

Wir erhalten demnach

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + d\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + dr\{\mathfrak{M} + \mathfrak{C}\}, \tag{14}$$

wo $\mathfrak{a}_1$ den Wert von $\mathfrak{a}$ im Punkte P bedeutet und

$$\mathfrak{M} = - \tfrac{1}{2}[\mathfrak{r}_0 \operatorname{rot} \mathfrak{a}] = - \mathfrak{r}_0 \Theta = + \Theta \mathfrak{r}_0, \tag{15}$$

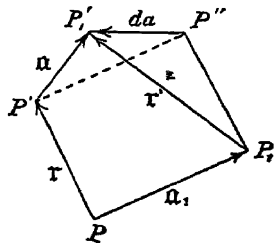
$$\mathfrak{C} = \mathfrak{r}_0 \nabla \cdot \mathfrak{a} + \tfrac{1}{2}[\mathfrak{r}_0 \operatorname{rot} \mathfrak{a}] = \mathfrak{r}_0 \mathrm{T} = \mathrm{T} \mathfrak{r}_0, \tag{16}$$

(17) ist. Außerdem ist $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 d r$,

$\mathfrak{r}_0$ der Einheitsvektor längs $\mathfrak{r}$ und dr der Betrag von $\mathfrak{r}$. Da $\mathfrak{a}_1$ die Verrückung des Punktes P des Korpers darstellt (Fig. 5), so kommt P nach der Verrückung in den Endpunkt des Vektors $\mathfrak{a}_1$, d. h. nach P_1

Fig. 5

Die Verruckung eines in einem sehr kleinen Abstand $\mathfrak{r}$ von P gelegenen Punktes P' des Körpers sei $\mathfrak{a}$. Dieser wird nach der Verruckung in den Endpunkt von $\mathfrak{a}$ zu liegen kommen, d h. in P_1' Hierbei geht $\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{r}'$ über. Machen wir $P'P''$ parallel $\mathfrak{a}_1$ und $P_1 P''$ parallel $\mathfrak{r}$, so ist $P_1 P'' = \mathfrak{r}$, $P'P'' = \mathfrak{a}_1$ und infolgedessen $P'' P_1' = d\mathfrak{a}$, also

(a) $$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} + d\mathfrak{a},$$

und hieraus und aus (14) folgt

(18) $$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}_0' dr' = dr(\mathfrak{r}_0 + \mathfrak{M} + \mathfrak{C}),$$

wo $\mathfrak{r}_0'$ den Einheitsvektor und dr' den Betrag von $\mathfrak{r}'$ bedeuten.

Multiplizieren wir (18) skalar mit $\mathfrak{r}_0$ und bezeichnen den Winkel zwischen $\mathfrak{r}_0'$ und $\mathfrak{r}_0$, d. h den Winkel $P_1' P_1 P''$ mit γ, so erhalten wir, aus (18) und (15),

(19) $$\frac{dr'}{dr} \cos \gamma = 1 + \mathfrak{r}_0 \mathfrak{C} = 1 + \mathfrak{r}_0 \mathrm{T} \mathfrak{r}_0 .$$

Wir denken uns um den Punkt P im Körper ein Volumen V_1 abgegrenzt, dessen Oberfläche den Bereich einschließt, innerhalb dessen die durch (14) gegebene Darstellung von $\mathfrak{a}$ gültig ist. Dieses Volumen V_1 wird beim Übergang von der ersten in die zweite Lage eine gewisse Deformation erleiden, die wegen der linearen Form von (18) als **homogen** bezeichnet wird. Deshalb kann man V_1 als den **Bereich der homogenen Deformation** bezeichnen.

Wir wollen jetzt diesen Bereich im Auge behalten und folgende Einschränkung einführen: es soll $d\mathfrak{a}$ klein gegen $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 dr$ sein.

Hieraus und aus Fig 6 ergibt sich, daß der Winkel $P_1' P_1 P'' = \gamma$ klein ist, so daß wir $\cos \gamma = 1$ setzen können Es folgt dann aus (19)

(20) $$\frac{dr'}{dr} = 1 + \mathfrak{r}_0 \mathfrak{C} = 1 + \mathfrak{r}_0 \mathrm{T} \mathfrak{r}_0 .$$

Aus der Annahme über $d\mathfrak{a}$ fließt ferner, da

(b) $$\mathfrak{r}' = \mathfrak{r} + d\mathfrak{a} = dr(\mathfrak{r}_0 + \mathfrak{M} + \mathfrak{C}) = \mathfrak{r}(1 - \Theta + \mathrm{T})$$

(c) ist, daß $$|\mathfrak{M} + \mathfrak{C}| \text{ klein gegen } 1$$

sein muß, und daß $\dfrac{dr'}{dr}$ wenig von 1 verschieden ist Das letzte fordert aber wegen (20), daß

(d) $$|\mathfrak{C}| \text{ klein gegen } 1$$

ist, denn (20) ist für ein beliebiges $\mathfrak{r}_0$ gültig. Aus (d) und (c) folgt

(e) $$|\mathfrak{M}| \text{ klein gegen } 1$$

Nach der Festsetzung dieser Größenverhältnisse wenden wir uns wieder zu dem Volumen V_1 und verfolgen seinen Übergang von der ersten in die zweite Lage Wie wir gesehen haben, hat sich hierbei ein Linienelement dr in dr' verwandelt, hat also um $dr' - dr$ zugenommen. Das Verhältnis

$$\frac{dr' - dr}{dr} = \frac{dr'}{dr} - 1 = \lambda$$

bezeichnet man als Dilatation oder Dehnung. Aus (20) folgt

(21) $$\lambda = \mathfrak{r}_0 \mathfrak{C} = \mathfrak{r}_0 \mathrm{T} \mathfrak{r}_0.$$

Wir fassen jetzt statt P' einen anderen Punkt des Körpers ins Auge. Sein Ortsvektor sei

$$\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_{10}\, dr_1$$

Durch die Verrückung gehe $\mathfrak{r}_1$ in

$$\mathfrak{r}_1' = \mathfrak{r}_{10}'\, dr_1'$$

über. Ähnlich wie (18) erhalten wir hierfür

(f) $$\mathfrak{r}_1' = \mathfrak{r}_{10}' dr_1' = dr_1 (\mathfrak{r}_{10} + \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{C}_1) = \mathfrak{r}_1(1 - \Theta + \mathrm{T}).$$

Bezeichnet ψ den Winkel zwischen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{r}_1$ vor der Verrückung und ψ' den Winkel nach der Verrückung, so ergibt die skalare Multiplikation von (18) und (f)

(g) $$\begin{aligned} \cos\psi' \frac{dr_1'}{dr_1} \cdot \frac{dr'}{dr} &= (\mathfrak{r}_0 + \mathfrak{M} + \mathfrak{C})(\mathfrak{r}_{10} + \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{C}_1). \\ &= \mathfrak{r}_0(1 - \Theta + \mathrm{T})(1 + \Theta + \mathrm{T})\mathfrak{r}_{10} \\ &= \mathfrak{r}_0(1 + 2\mathrm{T} + \mathrm{T}^2 + \mathrm{T}\Theta - \Theta\mathrm{T} - \Theta^2)\mathfrak{r}_0. \end{aligned}$$

Es ist aber nach (15)

$$\text{(h)} \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{r}_0 \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{r}_{10} \mathfrak{M} &= -\frac{\mathfrak{r}_0}{2}[\mathfrak{r}_{10} \operatorname{rot} \mathfrak{a}] - \frac{\mathfrak{r}_{10}}{2}[\mathfrak{r}_0 \operatorname{rot} \mathfrak{a}] = \\ &= -\frac{\operatorname{rot} \mathfrak{a}}{2} \{[\mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_{10}] + [\mathfrak{r}_{10} \mathfrak{r}_0]\} = 0. \end{aligned} \right.$$

Hieraus und aus (g) erhalten wir unter Vernachlässigung von kleinen Größen zweiter Ordnung, z. B $\mathfrak{M}\mathfrak{M}_1$ usw. infolge von (d) und (e)

$$\text{(22)} \quad \begin{aligned} \cos \psi' \frac{d r_1'}{d r_1} \frac{d r'}{d r} &= \mathfrak{r}_0 (1 + 2 \mathrm{T}) \mathfrak{r}_{10} = \mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_{10} + 2 \mathfrak{r}_0 \mathrm{T} \mathfrak{r}_{10} \\ &= \cos \psi + \mathfrak{r}_{10} \mathfrak{C} + \mathfrak{r}_0 \mathfrak{C}_1, \end{aligned}$$

oder da λ klein gegen 1 ist:

$$\text{(22a)} \quad \cos \psi' (1 + \lambda_1 + \lambda) = \cos \psi + \mathfrak{r}_{10} \mathfrak{C} + \mathfrak{r}_0 \mathfrak{C}_1,$$

wo

$$\lambda_1 = \frac{d r_1'}{d r_1} - 1$$

Ist insbesondere ψ ein rechter Winkel $(\mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_{10} = 0)$ und setzen wir dann $\psi' = \frac{\pi}{2} - \delta$, so wird δ klein sein:

$$\text{(22b)} \quad \cos \psi' = \delta = 2 \mathfrak{r}_0 \mathrm{T} \mathfrak{r}_{10} = 2 \mathfrak{r}_0 \mathfrak{C}_1$$

Setzen wir für einen Augenblick $\mathfrak{C} = 0$ bei beliebigem $\mathfrak{r}_0$, so folgt aus (21), daß beim Übergang von V_1 aus der ersten in die zweite Lage alle Linienelemente dr ihrer Länge nach unverandert bleiben; und aus (22) oder (22a), daß $\cos \psi' = \cos \psi$, d h. daß der Winkel zwischen einem Paar beliebiger Linienelemente bei der Verrückung ebenfalls konstant ist.

Hieraus ersehen wir, daß sich im Falle $\mathfrak{C} = 0$ das Volumen V_1 wie ein starrer Körper bewegt, also sich nicht deformiert. Und da in diesem Fall (14) übergeht in

$$\text{(i)} \quad \mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \tfrac{1}{2} [\operatorname{rot} \mathfrak{a}\, \mathfrak{r}_0]\, dr,$$

so ergibt ein Vergleich von (i) mit (32) Nr 8 und (a) Nr 8 unter Berücksichtigung von (e), daß

$$\text{(k)} \quad \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} \mathfrak{a} = \delta \mathfrak{z}$$

ist. Hierdurch wird die Achse und der Winkel bestimmt, um den sich das Volumen V_1 bei dem Übergang von der ersten in die zweite Lage gedreht hat.

Wir haben keine Annahme über die Größenverhältnisse von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$ selbst gemacht. Dies hindert aber nicht, (i) mit (32) Nr 8 und

(a) Nr. 8 zu vergleichen, denn eine parallele Verschiebung des Körpers wirkt nicht auf $\delta\mathfrak{z}$, d. h wir konnen zu beiden Seiten dieser Gleichungen in Nr. 8 einen beliebigen, für den ganzen Korper konstanten Vektor addieren. Hieraus geht die Berechtigung jenes Vergleiches hervor.

Da V_1 bei $\mathfrak{C} = 0$ keine Deformation erleidet, so ersehen wir umgekehrt, daß die Deformation von $\mathfrak{C}$ abhängen wird.

Aus Nr. 40 I wissen wir nun, daß $\mathfrak{C}$ ein el V. ist. Fällt $\mathfrak{r}_0$ mit einer der Hauptachsen zusammen, so folgt aus (21), daß die Hauptwerte von $\mathfrak{C}$ nichts anderes sind als die Dehnungen λ_1, λ_2, λ_3 der Hauptachsen. Die Gleichung des Ellipsoids lautet deshalb, wenn wir

$$(1) \qquad \mathfrak{C} = \mathfrak{i} c_1 + \mathfrak{j} c_2 + \mathfrak{k} c_3$$

setzen, wo sich $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ auf die Hauptachsen beziehen,

$$(23) \qquad \left(\frac{c_1}{\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{c_2}{\lambda_2}\right)^2 + \left(\frac{c_3}{\lambda_3}\right)^2 = 1.$$

Aus (21) folgt für den el. V. der Verzerrungen

$$(24) \qquad \mathfrak{C} = \mathfrak{r}_0 \nabla \cdot \mathfrak{a} + \tfrac{1}{2} [\mathfrak{r}_0 \operatorname{rot} \mathfrak{a}] = \mathfrak{i}\mathfrak{r}_0 \; \mathfrak{i}\lambda_1 + \mathfrak{j}\mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{j}\lambda_2 + \mathfrak{k}\mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{k}\lambda_3$$

Die Hauptwerte λ_1, λ_2 und λ_3 nennt man Hauptdehnungen

Der entsprechende Verzerrungstensor T ist, bezogen auf die Hauptachsen:

$$(25) \qquad \mathsf{T} = \mathfrak{i} \cdot \mathfrak{i}\lambda_1 + \mathfrak{j} \cdot \mathfrak{j}\lambda_2 + \mathfrak{k} \; \mathfrak{k}\lambda_3.$$

Dann ist $\mathfrak{C} = \mathfrak{r}_0 \mathsf{T}$ und $\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{C}\mathsf{T}^{-1}$, und die Gleichung des Ellipsoids lautet:

$$(23\text{a}) \qquad \mathfrak{C}\mathsf{T}^{-2}\mathfrak{C} = 1.$$

R. Gans nennt den Tensor T die Deformation des Verschiebungsvektors $\mathfrak{a}$ und schreibt $\mathsf{T} = \operatorname{def} \mathfrak{a}$. Wir können diesen Tensor nicht durch $\mathfrak{a}$ ausdrücken, ohne eine neue Bezeichnung einzuführen, die einen einzelnen Vektor als Faktor eines vektorischen Produkts (also als alternierenden Affinor) kenntlich macht. (Spielrein setzt dazu unter den Vektor eine eckige Klammer — Unterklammerung.)

Gehen wir nun zu einem beliebigen Achsenkreuz $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$ über und setzen

$$(\text{m}) \qquad \mathfrak{a} = \mathfrak{i}' u + \mathfrak{j}' v + \mathfrak{k}' w,$$

so können wir den Tensor (25) hierbei mit Hilfe von (224) I darstellen.

Fallen $\mathfrak{r}_{10}$ und $\mathfrak{r}_0$ mit zwei von den Hauptachsen zusammen, so ist in (22) $\cos\psi = 0$. Außerdem verschwinden die beiden Glieder rechter Seite, weil in diesem Falle $\mathfrak{r}_{10}$ und $\mathfrak{C}$, sowie $\mathfrak{r}_0$ und $\mathfrak{C}_1$ aufeinander senkrecht stehen. Deshalb ist auch $\cos\psi' = 0$. D. h. aber, daß die drei zueinander orthogonalen Linienelemente, die in der ersten Lage von V_1 mit den Hauptachsen und den Richtungen der Hauptdehnungen zusammenfallen, beim Übergange in die zweite Lage zueinander orthogonal bleiben. Oder mit anderen Worten: das mit diesen drei Linienelementen verbunden gedachte Achsenkreuz bewegt sich beim Übergange von der ersten in die zweite Lage wie ein starres Gerüst. Es erleidet also eine Parallelverschiebung $\mathfrak{a}_1$ und eine Drehung um eine bestimmte Achse und um einen kleinen Winkel. Diese Achse und diesen Winkel wollen wir jetzt bestimmen.

Fur $\mathfrak{C} = 0$ sind, wie aus (k) folgt, diese beiden Größen vollständig durch $\frac{1}{2}$ rot $\mathfrak{a}$ bestimmt

Bezeichnen wir $\mathfrak{r}_0' - \mathfrak{r}_0$ mit $\delta\mathfrak{r}_0$, so erhalten wir im allgemeinen aus (18) und (20)

$$\text{(n)} \qquad \delta\mathfrak{r}_0 + \mathfrak{r}_0' \cdot \mathfrak{r}_0 \mathfrak{C} - \mathfrak{C} = \mathfrak{M}.$$

Fallt $\mathfrak{r}_0$ mit einer der Hauptachsen zusammen, so ist wegen (25) $\mathfrak{C} = \mathfrak{r}_0\lambda$, und es folgt deshalb aus (n) und (15)

$$\text{(p)} \qquad \delta\mathfrak{r}_0(1 + \lambda) = -\tfrac{1}{2}[\mathfrak{r}_0 \operatorname{rot} \mathfrak{a}].$$

Es ist demnach $\delta\mathfrak{r}_0$ für alle drei Hauptachsen senkrecht zu rot $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{r}_0$, d h. zu der entsprechenden Achse Folglich sind alle drei $\delta\mathfrak{r}_0$ komplanar. Vernachlässigen wir λ gegen 1, so wird außerdem $\delta\mathfrak{r}_0$ fur alle drei Hauptachsen durch denselben Ausdruck

$$\text{(q)} \qquad \delta\mathfrak{r}_0 = -\tfrac{1}{2}[\mathfrak{r}_0 \operatorname{rot} \mathfrak{a}]$$

dargestellt. Hieraus folgt, daß auch für den Fall $\mathfrak{C} \neq 0$ der Vektor $\frac{1}{2}$ rot $\mathfrak{a}$ die Achse und den Winkel angibt, um den sich die Achsen der Hauptdehnungen beim Übergang von der ersten in die zweite Lage drehen. Der Unterschied zwischen dem Fall, daß $\mathfrak{C} = 0$ ist, und dem Fall $\mathfrak{C} \neq 0$ besteht darin, daß bei $\mathfrak{C} = 0$ das $\delta\mathfrak{z}$ in (k) die Drehung nach Richtung und Große für das ganze Volumen V_1 angibt und konstant ist innerhalb V_1, bei $\mathfrak{C} \neq 0$ aber $\delta\mathfrak{z}$ sich nur auf die Hauptachsen bezieht.

Wir betrachten jetzt den Vektor

$$\text{(r)} \qquad \mathfrak{A} = \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{C} = \mathfrak{i}c_1' + \mathfrak{j}c_2' + \mathfrak{k}c_3'.$$

Es ist ohne weiteres klar, daß dies auch ein el. V. sein wird, dessen Ellipsoid durch die Gleichung

$$\left(\frac{c_1'}{1+\lambda_1}\right)^2 + \left(\frac{c_2'}{1+\lambda_2}\right)^2 + \left(\frac{c_3'}{1+\lambda_3}\right)^2 = 1 \tag{26}$$

gegeben ist und $\mathfrak{A}$ selbst durch

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{i}\mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{i}(1+\lambda_1) + \mathfrak{j}\mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{j}(1+\lambda_2) + \mathfrak{k}\mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{k}(1+\lambda_3). \tag{27}$$

Die Achsen von (26) fallen selbstverstandlich mit denen von (24) zusammen.

Wir denken uns jetzt in Fig. 6 um den Punkt P als Mittelpunkt eine Kugel mit dem Radius dr, die innerhalb des Bereiches der homogenen Deformation liegen mag. Nach der Verrückung kommt der Mittelpunkt dieser Kugel nach P_1 Die Dilatationsachsen erfahren eine Drehung $\frac{1}{2}$ rot $\mathfrak{a}$. Um jetzt noch die Lage der verschiedenen Punkte nach der Verrückung zu finden, brauchen wir nur bei festliegenden Dehnungsachsen die Verzerrung der Kugel auszuführen. Aus (14) und (18) folgt, daß wir hierbei nur noch die von $\mathfrak{E}$ abhängigen Verrückungen zu berucksichtigen brauchen. Ein Punkt $\mathfrak{r}_0 dr$ der Oberfläche der Kugel erleidet demnach eine Verrückung $dr\,\mathfrak{E}$ und kommt in eine Lage, die sich bestimmt durch $dr(\mathfrak{r}_0 + \mathfrak{E}) = dr\,\mathfrak{A}$. Nehmen wir für einen Augenblick $dr = 1$ an, so geht hierbei eine solche Kugel in das Ellipsoid (26) über. Das letztere nennt man deshalb das Deformationsellipsoid oder Verzerrungsellipsoid.

Zu demselben Resultat gelangt man auch, wenn man zunächst aus der Kugel mit dem Mittelpunkt in P das Verzerrungsellipsoid konstruiert und nachtraglich das Ellipsoid wie einen starren Körper parallel um $\mathfrak{a}_1$ verschiebt und ihm eine Drehung $\frac{1}{2}$ rot $\mathfrak{a}$ erteilt.

Bilden wir nun mit Hilfe von (m) den Affinor Φ in (224,2) I, so ersehen wir, daß sein symmetrischer Teil uns die Deformation des Volumens charakterisiert und der alternierende Teil die Drehung des Volumens.

Dies deckt sich auch mit (104) I, wenn man bedenkt, daß nach (b) die relative Verrückung $d\mathfrak{a} = dr(\mathfrak{E} + \mathfrak{M})$ ist.

Das Volumen der Kugel mit dem Radius dr ist

$$v = \frac{4\pi}{3} dr^3, \tag{s}$$

und das Volumen v' des Ellipsoids, in das diese Kugel ubergegangen ist, wird sein

$$v' = \frac{4\pi}{3}(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)\,dr^3. \tag{t}$$

Aus (s) und (t) ergibt sich sofort die relative Volumenvergrößerung D zu

$$\frac{v' - v}{v} = D = (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_3) - 1$$

oder unter Vernachlässigung der Produkte der Dilatationen λ

$$D = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \tag{28}$$

oder infolge von (k) Nr **43a** I und (m):

$$D = \frac{\partial u}{\partial x'} + \frac{\partial v}{\partial y'} + \frac{\partial w}{\partial z'} = \operatorname{div} \mathfrak{a} = J, \tag{29}$$

wo x', y', z' sich auf das Achsenkreuz $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$ beziehen D. h. D ist der erste Skalar des Affinors Φ. Statt (29) können wir auch schreiben:

$$D = \frac{\partial a_1}{\partial x} + \frac{\partial a_2}{\partial y} + \frac{\partial a_3}{\partial z}, \tag{29a}$$

wenn sich a_1, a_2, a_3 und x, y, z auf die Hauptachsen beziehen, weshalb dann

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{i}\, a_1 + \mathfrak{j}\, a_2 + \mathfrak{k}\, a_3 \quad \text{sein wird} \tag{u}$$

15. Beziehungen zwischen den Spannungen und Verzerrungen. Die zu betrachtenden Körper sollen homogen und isotrop sein, außerdem vollkommen elastisch, d. h. das Hookesche Gesetz befolgen. Fur solche Körper nimmt man an, daß die Hauptachsen des Spannungsellipsoids mit denen des Verzerrungsellipsoids zusammenfallen, und setzt die Hauptspannungen (d. h. die Größen σ_1, σ_2, σ_3 in Nr. 12) gleich linearen Funktionen der Hauptdilatationen. Und zwar

$$\left\{\begin{aligned} &\sigma_1 = a\lambda_1 + b(\lambda_2 + \lambda_3), \quad \sigma_2 = a\lambda_2 + b(\lambda_1 + \lambda_3), \\ &\sigma_3 = a\lambda_3 + b(\lambda_1 + \lambda_2), \end{aligned}\right. \tag{30}$$

wobei angenommen wird, daß die erste Lage des Korpers in Nr 14 dem spannungslosen Zustande entspricht. Führt man statt a und b die Kirchhoffschen Elastizitätskonstanten K und Θ ein, die mit a und b durch die Gleichungen

$$2K = a - b, \qquad 2K\Theta = b, \tag{a}$$

also

$$2K(1 + \Theta) = a$$

und mit dem Elastizitätsmodul E, dem Gleitmodul G und der Poissonschen Konstanten ν durch die Gleichungen

$$K = G, \qquad 2K\frac{1+3\Theta}{1+2\Theta} = E, \qquad \frac{\Theta}{1+2\Theta} = \nu$$

verbunden sind, so ergibt sich statt (30) aus (28) und (29)

$$(31) \qquad \begin{cases} \sigma_1 = 2K(\lambda_1 + \Theta \operatorname{div} \mathfrak{a}), \quad \sigma_2 = 2K(\lambda_2 + \Theta \operatorname{div} \mathfrak{a}), \\ \sigma_3 = 2K(\lambda_3 + \Theta \operatorname{div} \mathfrak{a}). \end{cases}$$

Hieraus und aus (9) folgt

$$(32) \qquad \begin{cases} \mathfrak{P} = 2K\{\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{i}(\lambda_1 + \Theta \operatorname{div} \mathfrak{a}) + \\ + \mathfrak{j}\,\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{j}(\lambda_2 + \Theta \operatorname{div} \mathfrak{a}) + \mathfrak{k}\,\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{k}(\lambda_3 + \Theta \operatorname{div} \mathfrak{a})\} \end{cases}$$

oder

$$(32\,\mathrm{a}) \qquad \mathfrak{P} = 2K\Theta\mathfrak{n} \operatorname{div} \mathfrak{a} + 2K(\mathfrak{i}\,\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{i}\lambda_1 + \mathfrak{j}\,\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{j}\lambda_2 + \mathfrak{k}\,\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{k}\lambda_3)$$

oder nach (25)

$$(32\,\mathrm{b}) \qquad \Phi = 2K(\mathrm{T} + \Theta \operatorname{div} \mathfrak{a})$$

und aus (24), wenn wir dort $\mathfrak{r}_0$ durch $\mathfrak{n}$ ersetzen,

$$(33) \qquad \mathfrak{P} = 2K\Theta\mathfrak{n} \operatorname{div} \mathfrak{a} + 2K\mathfrak{n}\nabla\cdot\mathfrak{a} + K[\mathfrak{n} \operatorname{rot} \mathfrak{a}].$$

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{C}_1$ einen el. V., der aus (24) gebildet wird, indem $\mathfrak{r}_0$ durch $\mathfrak{n}$ ersetzt wird, so können wir statt (33) auch schreiben

$$(33\,\mathrm{a}) \qquad \mathfrak{P} = 2K\Theta\mathfrak{n} \operatorname{div} \mathfrak{a} + 2K\mathfrak{C}_1.$$

Aus (68) I folgt für eine konstante Richtung von $\mathfrak{n}$

$$(\mathrm{b}) \qquad \nabla\ \mathfrak{a}\mathfrak{n} = \mathfrak{n}\nabla\cdot\mathfrak{a} + [\mathfrak{n} \operatorname{rot} \mathfrak{a}],$$

weshalb man statt (33) auch schreiben kann

$$(34) \qquad \mathfrak{P} = 2K\Theta\mathfrak{n} \operatorname{div} \mathfrak{a} + K\mathfrak{n}\nabla\cdot\mathfrak{a} + K\nabla\cdot\mathfrak{a}\mathfrak{n}.$$

Für die normale Spannung $\mathfrak{N}$ erhalten wir aus (10), (33) und (b)

$$(35) \qquad \mathfrak{N} = 2K\Theta\mathfrak{n} \operatorname{div} \mathfrak{a} + 2K\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{n}\nabla\cdot\mathfrak{a}\,\mathfrak{n}$$

und für die tangentiale Spannung $\mathfrak{T}$ aus (35) und (33)

$$(36) \qquad \mathfrak{T} = \mathfrak{P} - \mathfrak{N} = K[\mathfrak{n} \operatorname{rot} \mathfrak{a}] + 2K\{\mathfrak{n}\nabla\cdot\mathfrak{a} - \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{n}\nabla\cdot\mathfrak{a}\,\mathfrak{n}\}.$$

Diesen Ausdruck können wir umformen auf Grund von (b), und weil $\mathfrak{n}$ als konstant bei der Operation ∇ angenommen wird, so daß

$$(\mathrm{c}) \qquad \mathfrak{n}\nabla\cdot\mathfrak{a} - \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{n}\nabla\cdot\mathfrak{a}\,\mathfrak{n} = -[\mathfrak{n}[\mathfrak{n}(\mathfrak{n}\nabla\cdot\mathfrak{a})]] = -\mathfrak{n}\nabla\cdot[\mathfrak{n}[\mathfrak{n}\,\mathfrak{a}]].$$

Deshalb ist

(36a) $$\mathfrak{T} = K[\mathfrak{n} \operatorname{rot} \mathfrak{a}] + 2K\mathfrak{n}\nabla \cdot [\mathfrak{n}[\mathfrak{a}\mathfrak{n}]].$$

Es ist aber

(d) $$\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{n}\nabla \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{n} = \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{n}(\mathfrak{n}\nabla \cdot \mathfrak{a}) = \mathfrak{n}\nabla(\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{n}),$$

weshalb man statt (35) auch schreiben kann

(35a) $$\mathfrak{N} = 2K\Theta\mathfrak{n} \operatorname{div} \mathfrak{a} + 2K\mathfrak{n}\nabla(\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{n}).$$

Ist df das zu $\mathfrak{n}$ senkrechte Flächenelement, fur das wir eben die Spannungen berechnet haben, so bedeutet $[\mathfrak{n}[\mathfrak{a}\mathfrak{n}]]$ nach Analogie mit (11) die zu diesem Element tangentiale und $\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{a}\mathfrak{n}$ die normale Verrückung. Dies erlaubt uns, folgende Deutung von (35a) und (36a) zu geben.

Die normale Spannung $\mathfrak{N}$ setzt sich zusammen aus zwei Gliedern, von denen das erste proportional der Volumenvergrößerung ist und das andere proportional der Änderung der normalen Verrückung langs der Normale, auf die Einheit der Länge berechnet. Die tangentiale Spannung $\mathfrak{T}$ besteht ebenfalls aus zwei Gliedern. Das erste hängt von der Drehung der Dehnungsachsen ab, und das zweite ist proportional der Änderung der tangentialen Verruckung längs der Normale, berechnet auf die Einheit der Lange

Wir wollen jetzt die Volumenkraft $\mathfrak{K}$ berechnen. Aus (94), (93) I und (1), (33) erhalten wir

(37) $$\mathfrak{K} = 2K\Theta\nabla \operatorname{div} \mathfrak{a} + 2K\nabla^2\mathfrak{a} + K \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathfrak{a}$$

oder wegen (79a) I

(37a) $$\mathfrak{K} = K(2\Theta + 1)\nabla \operatorname{div} \mathfrak{a} + K\nabla^2\mathfrak{a} \quad \text{oder}$$

(37b) $$\mathfrak{K} = 2K(\Theta + 1)\nabla \operatorname{div} \mathfrak{a} - K \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathfrak{a} \quad \text{oder endlich}$$

(37c) $$\mathfrak{K} = 2K(\Theta + 1)\nabla^2\mathfrak{a} + K(2\Theta + 1) \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathfrak{a}.$$

Bilden wir jetzt den ersten Skalor von Φ, so folgt aus Nr. 42 I und (31)

(38) $$J = X_x + Y_y + Z_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 2K(3\Theta + 1) \operatorname{div} \mathfrak{a}$$

Demnach ist die Invariante J nichts anderes als die Summe der normalen Spannungen zu drei senkrecht zueinander liegenden Flächenelementen und ist proportional der Volumenvergrößerung

Zieht man $\frac{1}{3} J$ von (32b) ab, so erhält man eine Gleichung, in der Θ nicht mehr vorkommt:

$$\Phi - \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = 2K(\mathrm{T} - \tfrac{1}{3}\operatorname{div} \mathfrak{a}). \tag{38a}$$

Aus (37b) und (38) erhalten wir

$$\operatorname{div} \mathfrak{K} = 2K(\Theta + 1)\nabla^2 \operatorname{div} \mathfrak{a} = \frac{\Theta + 1}{3\Theta + 1} \nabla^2 J. \tag{e}$$

Befindet sich der Körper im Gleichgewicht und sind die außeren Kräfte $\mathfrak{G} = 0$, so ist nach (2) auch $\mathfrak{K} = 0$, woraus sich infolge von (e) ergibt

$$\nabla^2 \operatorname{div} \mathfrak{a} = \nabla^2 J = 0. \tag{39}$$

Eine Funktion, die der Laplaceschen Gleichung genügt, nennt man eine harmonische. Deshalb muß die Invariante J der Spannung für einen isotropen elastischen Körper im Falle des Gleichgewichtes und bei Abwesenheit von äußeren Fernkräften eine harmonische Funktion sein.

16. Berechnung des elastischen Potentials und der Geschwindigkeit der Energieströmung. Wir wollen hier zeigen, daß man auf Grund des Wertes für $\mathfrak{K}$ in Nr 15 eine solche Funktion A (siehe (b) Nr. 13) bekommt, die sich tatsächlich als die Variation einer Funktion V, d h. des elastischen Potentials, darstellen läßt

Dazu multiplizieren wir (2) mit $dv\,\delta\mathfrak{a}$, wo $\delta\mathfrak{a}$ die entsprechende virtuelle Verrückung des Volumenelementes dv bedeutet, und integrieren uber das Volumen V. Es ergibt sich dann

$$\int_V \varrho \frac{d\mathfrak{v}}{dt}\,\delta\mathfrak{a}\cdot dv = \int_V \varrho\,\mathfrak{G}\,\delta\mathfrak{a}\cdot dv + \int_V \mathfrak{K}\,\delta\mathfrak{a}\cdot dv, \tag{a}$$

wobei nach (37)

$$\left\{\begin{aligned} \int_V \mathfrak{K}\,\delta\mathfrak{a}\cdot dv = 2K\Theta \int_V \delta\mathfrak{a}\nabla \operatorname{div}\mathfrak{a}\cdot dv + 2K\int_V \delta\mathfrak{a}\nabla^2\mathfrak{a}\,dv + \\ + K\int_V \delta\mathfrak{a}\operatorname{rot}^2\mathfrak{a}\cdot dv \quad \text{ist.} \end{aligned}\right. \tag{b}$$

Diesen Ausdruck wollen wir umformen. Es ist

$$\left\{\begin{aligned} \delta\mathfrak{a}\nabla \operatorname{div}\mathfrak{a} &= \operatorname{div}(\delta\mathfrak{a}\operatorname{div}\mathfrak{a}) - \operatorname{div}\mathfrak{a}\cdot\operatorname{div}\delta\mathfrak{a} = \\ &= \operatorname{div}(\delta\mathfrak{a}\operatorname{div}\mathfrak{a}) - \operatorname{div}\mathfrak{a}\cdot\delta\operatorname{div}\mathfrak{a} = \\ &= \operatorname{div}(\delta\mathfrak{a}\operatorname{div}\mathfrak{a}) - \frac{\delta(\operatorname{div}\mathfrak{a})^2}{2} \end{aligned}\right. \tag{c}$$

und ähnlich

(d) $$\delta\mathfrak{a}\,\mathrm{rot\,rot}\,\mathfrak{a} = \mathrm{div}\,[\mathrm{rot}\,\mathfrak{a}\,\delta\mathfrak{a}] + \frac{\delta(\mathrm{rot}\,\mathfrak{a})^2}{2}$$

Aus (73) I folgt

(e) $$\delta\mathfrak{a}(\mathfrak{n}\nabla\cdot\mathfrak{a}) = \mathfrak{n}(\delta\mathfrak{a}\nabla\cdot\mathfrak{a}) + \mathfrak{n}[\delta\mathfrak{a}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{a}].$$

Bezeichnen wir mit F die Oberfläche von V, so ergibt (e) und (d) mit Hilfe des Gaußschen Satzes

(f) $$\left\{\begin{aligned}\int_F \delta\mathfrak{a}(\mathfrak{n}\nabla\cdot\mathfrak{a})\,df = &\int_V \mathrm{div}\,\{\delta\mathfrak{a}\nabla\cdot\mathfrak{a}\}\,dv + \\ &+\int_V \frac{\delta(\mathrm{rot}\,\mathfrak{a})^2}{2}\,dv - \int_V \delta\mathfrak{a}\,\mathrm{rot}^2\,\mathfrak{a}\,dv\end{aligned}\right.$$

Es bedeutet also $\delta\mathfrak{a}$ zugleich die virtuelle Verrückung eines Elementes von F.

Wir brauchen jetzt nur noch den Wert von $\mathrm{div}\,\{\delta\mathfrak{a}\nabla\cdot\mathfrak{a}\}$ zu bestimmen. Zu dem Zweck ersetzen wir in den Ausdrucken (63) und (68) I $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{A}$ durch $\delta\mathfrak{a}$ und addieren sie Es folgt dann der Wert von $2\,\delta\mathfrak{a}\nabla\cdot\mathfrak{a}$. Nehmen wir hiervon div, so erhalten wir nach einigen leichten Umformungen:

(g) $$\left\{\begin{aligned}\mathrm{div}\,\{\delta\mathfrak{a}\nabla\cdot\mathfrak{a}\} = &\tfrac{1}{4}\,\delta\nabla^2\mathfrak{a}^2 - \frac{\delta(\mathrm{rot}\,\mathfrak{a})^2}{2} + \frac{\delta(\mathfrak{a}\,\mathrm{rot}^2\,\mathfrak{a})}{2} - \\ &- \frac{\delta(\mathfrak{a}\nabla\,\mathrm{div}\,\mathfrak{a})}{2} + \delta\mathfrak{a}\nabla\,\mathrm{div}\,\mathfrak{a}\end{aligned}\right.$$

Durch Einsetzen in (f) erhält man unter Berücksichtigung von (79 a) I

(h) $$\int_F \delta\mathfrak{a}(\mathfrak{n}\nabla\cdot\mathfrak{a})\,df = \int_V \tfrac{1}{4}\,\delta\nabla^2\mathfrak{a}^2\,dv - \int_V \frac{\delta(\mathfrak{a}\nabla^2\mathfrak{a})}{2}\,dv + \int_V \delta\mathfrak{a}\nabla^2\mathfrak{a}\,dv.$$

Auf Grund von (b), (c), (d), (h) und (33) erhalten wir

(i) $$\int_V \mathfrak{K}\,\delta\mathfrak{a}\,dv = \int_F \mathfrak{P}\,\delta\mathfrak{a}\,df - \int_V \delta V\,dv, \quad \text{wo}$$

(40) $$V = K\Theta(\mathrm{div}\,\mathfrak{a})^2 + K\frac{\nabla^2\mathfrak{a}^2}{2} - \frac{K(\mathrm{rot}\,\mathfrak{a})^2}{2} - K\mathfrak{a}\nabla^2\mathfrak{a}$$

ist. Aus Nr. 13 folgt, daß V nichts anderes als die Dichte des elastischen Potentials ist.

Wir denken uns innerhalb des Volumenelementes, für das wir V berechnen wollen, ein Achsenkreuz $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$, das beliebig zu dem

Achsenkreuz $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ der Hauptdehnungen und Hauptspannungen orientiert ist. Die zu $\mathfrak{i}', \mathfrak{j}'$ und $\mathfrak{k}'$ gehörenden Koordinaten bezeichnen wir mit x', y', z', und die entsprechenden Komponenten von $\mathfrak{a}$ mit u, v, w. Für die Achsen $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ haben wir schon die Bezeichnungen x, y, z und a_1, a_2, a_3 (siehe Ableitung von (29) und (29a)) gebraucht.

Führen wir für das Kreuz $\mathfrak{i}', \mathfrak{j}', \mathfrak{k}'$ die in (40) angegebenen Operationen aus, so erhalten wir

$$(41)\quad \begin{cases} V = K\Theta(\operatorname{div}\mathfrak{a})^2 + K\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z'}\right)^2\right\} + \\ \quad + \frac{K}{2}\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial z'}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y'} + \frac{\partial v}{\partial z'}\right)^2\right\}. \end{cases}$$

Dies ist die von Kirchhoff gegebene Form des Potentials V

Wir wollen jetzt $\mathfrak{i}', \mathfrak{j}', \mathfrak{k}'$ mit $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ zusammenfallen lassen und für diesen Fall den Ausdruck (41) umformen.

Den Tensor (25) können wir, wie schon dort bemerkt wurde, durch (224) I darstellen. Berücksichtigen wir nun (a) Nr. **42** I, so erhalten wir demnach:

$$(\text{k})\qquad Y_{x'} = X_{y'} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y'} + \frac{\partial v}{\partial x'}\right); \quad \text{usw.}$$

Gehen wir jetzt zu den Hauptachsen über, so verschwinden nach Nr. **42** I die Ausdrücke (k) und, da in diesem Fall:

$$(\text{l})\qquad \frac{\partial u}{\partial x'} = \frac{\partial a_1}{\partial x} = \lambda_1 \quad \text{usw.}$$

ist, so konnen wir statt (41) schreiben

$$(42)\qquad V = K\Theta(\operatorname{div}\mathfrak{a})^2 + K(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)$$

Ersetzt man $\mathfrak{n}$ in dem Ausdruck (33) für $\mathfrak{P} = \Phi\mathfrak{n}$ durch $-\mathfrak{x}$, so bekommt man nach (13a) für die Dichte des Energiestroms

$$(43)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{B} &= -K(2\,\mathfrak{x}\nabla\cdot\mathfrak{a} + [\mathfrak{x}\operatorname{rot}\mathfrak{a}] + 2\,\Theta\,\mathfrak{x}\operatorname{div}\mathfrak{a}) \\ &= -2K\mathfrak{x}(\operatorname{def}\mathfrak{a} + \Theta\operatorname{div}\mathfrak{a}) \end{aligned}$$

17. **Tensorfelder.** Entsprechend dem Begriff des Vektorfeldes können wir auch den Begriff des Tensorfeldes einfuhren und darunter einen Raum verstehen, wo jedem Punkt ein Tensor zugeordnet ist Ein Tensor wird durch seine Hauptwerte und durch die Richtungen der Achsen des zugehörigen Ellipsoids charakterisiert Demnach gehören zu jedem Punkt des Tensorfeldes ein bestimmt gelagertes Achsenkreuz und die entsprechenden Hauptwerte.

Ein Tensorfeld, wo die Hauptwerte überall konstant und die Achsen uberall gleich gerichtet sind, können wir als homogenes Tensorfeld bezeichnen.

Wir haben in Kapitel II gesehen, daß zu jedem Punkt eines starren Korpers ein Trägheitsellipsoid gehört Es ist demnach ein solcher Körper ein Tensorfeld. Ebenfalls ist ein gespannter elastischer Körper ein Tensorfeld Zugleich ersehen wir, daß sich das Tensorfeld über ein Vektorfeld uberlagert und zwar beim starren Körper über das Vektorfeld der Geschwindigkeit und beim elastischen Körper über das der Verschiebung Beide Felder, das Tensorfeld und das zugehorige Vektorfeld, sind eng mit einander verkettet und verschwinden gleichzeitig

18. Beispiel 1. Gleichmäßiger Druck auf die Oberfläche des Körpers. Wir wollen jetzt die abgeleiteten Ausdrücke durch einige Beispiele erläutern. Als erstes Beispiel nehmen wir an, es wirke auf die Oberfläche eines jeden Volumenelementes ein gleichmäßiger normaler Druck und zwar konstant innerhalb des ganzen Körpers.

Hieraus folgt, daß das Spannungsellipsoid und das Verzerrungsellipsoid zu einer Kugel wird mit einem fur den ganzen Körper konstanten Radius. Der Körper wird demnach ein homogenes Tensorfeld darstellen. Wir haben also

$$\text{(a)} \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{\omega}{3} = \text{konst.}, \qquad \operatorname{div} \mathfrak{a} = -\omega.$$

Das — Zeichen entspricht der Annahme eines Druckes, da sich hierbei das Volumen verkleinert.

Die gesamte Verminderung v_1 des Volumens v des Körpers ist

$$\text{(b)} \qquad v_1 = -\omega v$$

Hieraus und aus (32a) folgt

$$\text{(c)} \qquad \mathfrak{P} = -s \cdot \frac{v_1}{v}\,\mathfrak{n},$$

$$\text{(d)} \quad \text{wo} \qquad s = \frac{2K(3\Theta + 1)}{3}$$

den sogenannten Volumenmodul oder Kompressionsmodul bedeutet (vgl. 38); und aus (42)

$$\text{(e)} \qquad V = \frac{s}{2}\frac{v_1^{\,2}}{v^2}.$$

Damit sich der Korper in einem solchen Spannungszustand befinden kann, muß auf seine Oberfläche der durch (c) dargestellte

Druck wirken Dies können wir durch Eintauchen des Korpers in ein Gefäß mit Wasser und Komprimieren des Wassers durch einen Stempel erreichen.

Nehmen wir an, der Übergang vom spannungslosen in den gespannten Zustand gehe so langsam vor sich, daß wir die Beschleunigungen vernachlässigen können. Sehen wir außerdem von den äußeren Fernkräften ab, so folgt aus (2) $\mathfrak{K} = 0$, und aus (1) Nr. 16 und (e) ergibt sich daher:

$$\int_F \mathfrak{P}\,\delta\mathfrak{a}\,df = \int_V \delta V dv = \frac{s}{v^2}\int_V v_1\,\delta v_1\,dv = \frac{s v_1\,\delta v_1}{v}.$$

Demnach ist die von den Druckkräften bei diesem Übergang geleistete Arbeit A, die sogenannte Formänderungsarbeit, gleich

$$\text{(f)} \qquad A = \frac{s}{v}\int_0^{v_1} v_1\,\delta v_1 = \frac{s v_1^{\,2}}{2v} = Vv$$

Drückt man in (32b) Θ nach (d) durch s aus, so erhält man

$$\Phi = 2K(\mathrm{T} - \tfrac{1}{3}\operatorname{div}\mathfrak{a}) + s\operatorname{div}\mathfrak{a}.$$

19. Beispiel 2. Spannungen in einem Zylinder. Wir wollen wieder ein homogenes Tensorfeld annehmen und als Verzerrungsellipsoid ein Rotationsellipsoid.

Es ist dann

(a) $\lambda_1 = \lambda_2 = \varepsilon = \text{konst}, \qquad \lambda_3 = \nu = \text{konst},$[1]

(b) hieraus folgt $\qquad \operatorname{div}\mathfrak{a} = 2\varepsilon + \nu.$

Die dem λ_3 entsprechende Dehnungsachse sei parallel der Erzeugenden eines Zylinders und der z- oder $\mathfrak{k}$-Achse. Es ergibt sich deshalb aus (32a), (a) und (b)

(c) $\mathfrak{P} = 2K\Theta(2\varepsilon + \nu)\mathfrak{n} + 2K\varepsilon(\mathfrak{i}\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{j}) + 2K\nu\mathfrak{k}\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{k}$

Wir denken uns jetzt den Zylinder durch zwei zur Mantelfläche senkrechte Ebenen f_1 und f_2 begrenzt. Auf die eine dieser Ebenen f_1 wirkt die Spannung

(d) $\qquad \mathfrak{P}_1 = 2K(2\varepsilon\Theta + \Theta\nu + \nu)\mathfrak{k},$

---

1) Dieses ν hat natürlich mit der Poissonschen Konstanten ν in Nr. 15 nichts zu tun.

wobei angenommen wird, daß $\mathfrak{n}$ in die Richtung von $\mathfrak{k}$ fällt. Für die andere Ebene ist dann $\mathfrak{n} = -\mathfrak{k}$ und die entsprechende Spannung $\mathfrak{P}_2$

(e) ist
$$\mathfrak{P}_2 = -\mathfrak{P}_1.$$

Beide Spannungen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ sind normal zu den entsprechenden Flächen f_1 und f_2.

Die Spannung $\mathfrak{P}_m$ auf der Mantelfläche ist, da $\mathfrak{k}\mathfrak{n} = 0$ ist,
$$\mathfrak{P}_m = 2K\Theta(2\varepsilon + \nu)\mathfrak{n} + 2K\varepsilon(\mathfrak{i}\mathfrak{n}\ \ \mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{n}\ \ \mathfrak{j})$$

oder, da hierbei $\mathfrak{n} = \mathfrak{i}\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{i} + \mathfrak{j}\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{j}$ ist,

(f)
$$\mathfrak{P}_m = 2K(2\Theta\varepsilon + \Theta\nu + \varepsilon)\mathfrak{n}.$$

Wir wollen jetzt annehmen, daß der Zylinder nur an den Flächen f_1 und f_2 durch normaleu Zug oder Druck beansprucht wird. Es ist dann $\mathfrak{P}_m = 0$, und aus (f) folgt

(g)
$$\varepsilon = -\frac{\Theta\nu}{2\Theta + 1}.$$

Daher ist der Verzerrungstensor
$$\mathsf{T} = \nu\,\frac{(3\Theta + 1)\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{k} - \Theta}{2\Theta + 1}.$$

Aus (d) und (g) ergibt sich

(h)
$$\mathfrak{P}_1 = E\nu\mathfrak{k},$$

(i) wo
$$E = 2K\frac{1 + 3\Theta}{1 + 2\Theta}$$

den sogenannten Elastizitatsmodul bedeutet

Der Spannungstensor ist
$$\Phi = E\nu\mathfrak{k}\ \ \mathfrak{k}.$$

Für das Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdehnung erhalten wir aus (g)

(k)
$$\frac{\lambda_1}{\lambda_3} = \frac{\varepsilon}{\nu} = -\frac{\Theta}{2\Theta + 1}.$$

Bei positivem ν, also bei einer Dehnung ist ε negativ, d h es tritt eine Querkontraktion ein. Das Umgekehrte wird beim Druck entstehen.

Aus (g) und (b) ergibt sich

(l)
$$\operatorname{div}\mathfrak{a} = \frac{\nu}{2\Theta + 1}.$$

Deshalb ist die gesamte Volumenzunahme v_1 gleich

(m) $$v_1 = \frac{\nu v}{2\Theta + 1},$$

wenn v das Volumen des Zylinders im spannungslosen Zustand bedeutet.

Aus (42) und (m) erhalten wir

(n) $$V = \frac{E\nu^2}{2} = \frac{E(2\Theta+1)^2}{2} \cdot \frac{v_1^2}{v^2},$$

woraus sich die Formänderungsarbeit A ergibt, wenn wir wieder $\mathfrak{K} = 0$ annehmen:

(o) $$A = \int_0^{v_1}\int_v \delta V dv = \frac{E(2\Theta+1)^2}{v}\int_0^{v_1} v_1 \delta v_1 = Vv$$

Bezeichnen wir die Länge des Zylinders im spannungslosen Zustand mit l und die Verlängerung mit l_1, so ist

(p) $$l_1 = \nu l,$$

und wir können deshalb statt (h) schreiben

(q) $$\mathfrak{P}_1 = E\frac{l_1}{l}\mathfrak{k}.$$

Nehmen wir jetzt f_2 als unbeweglich an, so wird die Formänderungsarbeit nur durch die auf die Fläche f_1 wirkenden normalen Kräfte geleistet

Die Verrückung dieser Fläche ist wegen (p)

(r) $$\mathfrak{a}_1 = \nu l\mathfrak{k} = l_1\mathfrak{k},$$

und die virtuelle Verrückung

(s) $$\delta\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{k}\delta l_1$$

Hieraus und aus (q) folgt

(t) $$A = \int_0^{\mathfrak{a}_1}\int_{f_1} \mathfrak{P}_1 \delta\mathfrak{a}_1 df = \frac{E}{l}\int_0^{l_1}\int_{f_1} l_1 \delta l_1 df = \frac{E f_1 l_1^2}{2l} = \frac{E v \nu^2}{2} = Vv,$$

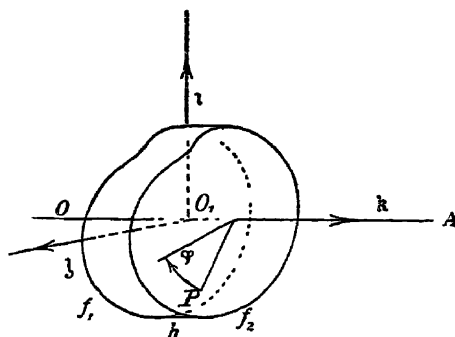
d h. der Ausdruck (o).

20. Beispiel 3. Torsion eines Zylinders. In den vorigen Beispielen haben wir homogene Tensorfelder angenommen, die Verzerrungen als gegeben betrachtet und hieraus die Spannungen, das

Potential und die Formänderungsarbeit berechnet. Jetzt wollen wir aber die Verschiebungen als gegeben annehmen und hieraus die anderen Größen berechnen.

Der betrachtete Körper sei ein Zylinder, dessen Endflächen f_1 und f_2 eben sind und senkrecht zur Mantelfläche. Die Höhe h soll klein im Verhältnis zu den linearen Dimensionen von f sein (Fig 6). OA ist eine zu f senkrechte Achse des Zylinders, die zugleich mit der $\mathfrak{k}$- oder Z-Achse zusammenfallen soll. Den Koordinatenanfang legen wir in den Durchstoßpunkt O_1 der Achse OA mit f_1.

Fig 6.

Demnach liegen $\mathfrak{i}$ und $\mathfrak{j}$ in der Ebene f_1, die wir als fest im Raume annehmen.

Außerdem setzen wir von vornherein die Volumenkraft

$$\mathfrak{K} = 0. \tag{a}$$

Teilen wir den Zylinder in Schichten parallel zu f, so soll die Verschiebung eine solche sein, daß sich hierbei jede Schicht um OA um einen Winkel φ dreht, der proportional der Entfernung dieser Schicht von f_1 ist, und zwar entgegen dem Uhrzeiger, wenn man in der Richtung $\mathfrak{k}$ blickt. Es ist deshalb

$$\varphi = \tau z. \tag{b}$$

Demnach hat sich f_2 um den Winkel $\varphi_1 = \tau h$ gedreht und ein Punkt P auf f_2 den Bogen $\tau h r$ beschrieben, wenn r die Entfernung dieses Punktes von der Achse bedeutet.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor, von der Achse aus gerechnet senkrecht zu dieser bis zu dem Punkt P, so daß $|\mathfrak{r}| = r$ ist, und zwar zu der Lage von P, die dieser Punkt vor der Verschiebung einnahm Dann können wir bei genügender Kleinheit von τ und h annehmen, daß die Verrückung $\mathfrak{a}'$ mit der Tangente an den Bogen im Endpunkt von $\mathfrak{r}$ zusammenfällt und gleich ist

$$\mathfrak{a}' = \tau h\,[\mathfrak{r}\mathfrak{k}]$$

Um so mehr wird diese Gleichung fur Schichten zwischen f_1 und f_2 gelten. Wir haben deshalb allgemein

$$\mathfrak{a} = \tau z\,[\mathfrak{r}\mathfrak{k}], \tag{c}$$

wobei z von o bis h gerechnet wird. Auf der Achse selbst ist die Verschiebung gleich Null.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{r}_1$ den Radiusvektor vom Koordinatenanfang bis zu einem Punkt des Körpers vor der Verrückung, so ist $\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r} + z\mathfrak{k}$

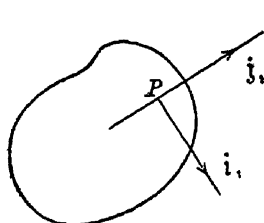



Fig 7

(d) oder $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 - z\mathfrak{k}$,

und wir können deshalb statt (c) schreiben

(e) $\mathfrak{a} = \tau z\,[\mathfrak{r}_1\mathfrak{k}]$.

Hieraus und aus (65) I ergibt sich, da $\nabla z = \mathfrak{k}$ und $\operatorname{rot}\mathfrak{r}_1 = 0$ ist,

(f) $\operatorname{div}\mathfrak{a} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$.

Und aus (69) I

(g) $\operatorname{rot}\mathfrak{a} = \tau\cdot\operatorname{rot} z\,[\mathfrak{r}_1\mathfrak{k}] = \tau z\operatorname{rot}[\mathfrak{r}_1\mathfrak{k}] - \tau\,[[\mathfrak{r}_1\mathfrak{k}]\,\mathfrak{k}]$

Mit Hilfe von (63) I und (100) I wird

$$\operatorname{rot}[\mathfrak{r}_1\mathfrak{k}] = \mathfrak{k}\nabla\cdot\mathfrak{r}_1 - 3\,\mathfrak{k},$$

da $\mathfrak{k}$ konstant ist. Aus (101) I ergibt sich

(h) $\operatorname{rot}[\mathfrak{r}_1\mathfrak{k}] = -2\,\mathfrak{k} = \operatorname{rot}[\mathfrak{r}\mathfrak{k}]$.

Andererseits ist wegen (d)

(i) $-[[\mathfrak{r}_1\mathfrak{k}]\,\mathfrak{k}] = \mathfrak{r}_1 - \mathfrak{k}\cdot\mathfrak{r}_1\mathfrak{k} = \mathfrak{r}$.

Hieraus und aus (h) folgt statt (g)

(k) $\operatorname{rot}\mathfrak{a} = \tau\mathfrak{r} - 2\tau z\mathfrak{k} = \tau([\mathfrak{k}[\mathfrak{r}_1\mathfrak{k}]] - 2z\mathfrak{k})$

Fig 7 stelle einen zur Achse OA senkrechten Querschnitt des Zylinders vor. Die $\mathfrak{k}$-Achse steht senkrecht zur Zeichenebene und weist zum Beschauer hin. In einen Punkt P des Querschnittes legen wir den Anfangspunkt des Kreuzes $\mathfrak{i}_1$, $\mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{k}_1$, wobei $\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}$ ist und $\mathfrak{j}_1$ in die Richtung von $\mathfrak{r}$ fallen soll. Fur dieses Koordinatensystem wollen wir $\mathfrak{C}$ berechnen Hierbei ist der Einheitsvektor $\mathfrak{r}_0$, entsprechend der Bedeutung von $\mathfrak{C}$ in (24), vom Punkte P aus zu rechnen und darf nicht als Einheitsvektor von $\mathfrak{r}$ aufgefaßt werden.

Es ist also wegen (24), (c) und (k)

(l) $\mathfrak{C} = \mathfrak{r}_0\nabla\cdot\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\,[\mathfrak{r}_0\operatorname{rot}\mathfrak{a}] = \tau\mathfrak{r}_0\nabla\cdot z\,[\mathfrak{r}\mathfrak{k}] + \frac{\tau}{2}\,[\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}] - \tau z\,[\mathfrak{r}_0\mathfrak{k}]$.

Wir lassen jetzt $\mathfrak{r}_0$ mit $\mathfrak{i}_1$, $\mathfrak{j}_1$ und $\mathfrak{k}_1$ zusammenfallen, woraus sich dann die Werte von $\mathfrak{C}_{x_1}$, $\mathfrak{C}_{y_1}$, $\mathfrak{C}_{z_1}$ ergeben zu:

(m)
$$\begin{cases} \mathfrak{C}_{x_1} = \mathfrak{i}_1 \nabla \cdot \mathfrak{a} + \frac{\tau r}{2} \mathfrak{k} + \tau z \mathfrak{j}_1 \\ \mathfrak{C}_{y_1} = \mathfrak{j}_1 \nabla \cdot \mathfrak{a} - \tau z \mathfrak{i}_1 \\ \mathfrak{C}_{z_1} = \mathfrak{k}_1 \nabla \cdot \mathfrak{a} - \frac{\tau r}{2} \mathfrak{i}_1 . \end{cases}$$

Infolge von (59) I ist aber, da ein Element längs $\mathfrak{i}_1$ gleich $r\,d\varphi$ angenommen werden kann,

$$\mathfrak{i}_1 \nabla \cdot \mathfrak{a} = \frac{d\mathfrak{a}}{r\,d\varphi} = \frac{\tau z}{r}\left[\frac{d\mathfrak{r}}{d\varphi}\mathfrak{k}\right],$$

oder da $\frac{d\mathfrak{r}}{d\varphi} = r\mathfrak{i}_1$ ist,

(n)
$$\mathfrak{i}_1 \nabla \cdot \mathfrak{a} = \tau z\,[\mathfrak{i}_1 \mathfrak{k}] = -\tau z \mathfrak{j}_1 .$$

Ebenso erhalten wir

(p)
$$\begin{cases} \mathfrak{j}_1 \nabla \cdot \mathfrak{a} = \tau z \left[\frac{d\mathfrak{r}}{dr}\mathfrak{k}\right] = \tau z [\mathfrak{j}_1 \mathfrak{k}] = \tau z \mathfrak{i}_1 , \\ \mathfrak{k}_1 \nabla \cdot \mathfrak{a} = \tau r\, \mathfrak{i}_1 . \end{cases}$$

Deshalb führen (m), (n), (p) und Nr. 40 I zu

(q)
$$\mathfrak{C} = \frac{\tau r}{2}\{\mathfrak{i}_1 \mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_1 \mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{i}_1\}$$

oder
$$\mathrm{T} = \tau r \frac{\mathfrak{k}_1 \cdot \mathfrak{i}_1 + \mathfrak{i}_1 \cdot \mathfrak{k}_1}{2}.$$

Hieraus ersehen wir, daß $\mathfrak{C}$ ständig senkrecht zu $\mathfrak{j}_1$ und $\mathfrak{r}$ ist. Liegt $\mathfrak{r}_0$ in der $\mathfrak{i}_1\mathfrak{k}_1$-Ebene, so folgt

$$\mathfrak{C}^2 = \left(\frac{\tau r}{2}\right)^2 \{(\mathfrak{i}_1 \mathfrak{r}_0)^2 + (\mathfrak{k}_1 \mathfrak{r}_0)^2\} = \left(\frac{\tau r}{2}\right)^2,$$

d. h. das Ellipsoid von $\mathfrak{C}$ ist in einen Kreis übergegangen, dessen Ebene senkrecht auf $\mathfrak{r}$ steht.

Bezeichnet γ den Winkel zwischen $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{r}_0$, im Sinne des Uhrzeigers, wenn man längs $\mathfrak{r}$ blickt, so ist

$$\mathfrak{C}\mathfrak{r}_0 = \tau r \mathfrak{i}_1 \mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{k}_1 \mathfrak{r}_0 = \frac{\tau r}{2} \sin 2\gamma$$

Für $\gamma = 45^0$ ist $\mathfrak{C}\mathfrak{r}_0 = \frac{\tau r}{2}$ ein Maximum und für $\gamma = 90^0 + 45^0$ ist $\mathfrak{C}\mathfrak{r}_0 = -\frac{\tau r}{2}$, also ein Minimum. Für diese Lagen von $\mathfrak{r}_0$ fällt demnach $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{r}_0$ zusammen, und es bestimmen diese Richtungen die

Hauptdehnungen. Drehen wir deshalb das Kreuz $\mathfrak{i}_1, \mathfrak{j}_1, \mathfrak{k}_1$ um 45^0 um $\mathfrak{j}_1$ und bezeichnen es in der neuen Lage mit $\mathfrak{i}_1', \mathfrak{j}_1', \mathfrak{k}_1'$, so ist

(r) $$\mathfrak{E} = -\frac{\tau r}{2}\mathfrak{i}_1'\mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{i}_1' + \frac{\tau r}{2}\mathfrak{k}_1'\mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{k}_1',$$

wo $\mathfrak{r}_0$ wieder eine beliebige Richtung haben kann.

Aus (r) ergeben sich die Hauptdehnungen zu

(s) $$\lambda_2 = 0; \quad \lambda_3 = -\lambda_1 = \frac{\tau r}{2},$$

was mit (f) übereinstimmt.

Aus (f), (q) und (33a) folgt

(t) $$\mathfrak{P} = K\tau r\,\{\mathfrak{i}_1\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_1\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{i}_1\}$$

oder $$\Phi = 2K\mathsf{T} = K\tau r(\mathfrak{k}_1 \cdot \mathfrak{i}_1 + \mathfrak{i}_1 \cdot \mathfrak{k}_1)$$

oder wegen (r) auch

(u) $$\mathfrak{P} = K\tau r\,\{\mathfrak{k}_1'\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{k}_1' - \mathfrak{i}_1'\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{i}_1'\}$$
$$\Phi = K\tau r(\mathfrak{k}_1' \cdot \mathfrak{k}_1' - \mathfrak{i}_1' \cdot \mathfrak{i}_1')$$

(v) und aus (42) das elastische Potential $V = K\frac{\tau^2 r^2}{2}$.

Wir hätten auch so rechnen können: Aus (e) folgt

$$\mathfrak{r}_0\nabla \cdot \mathfrak{a} = \tau(\mathfrak{r}_0\mathfrak{k} \cdot [\mathfrak{r}_1\mathfrak{k}] + z[\mathfrak{r}_0\mathfrak{k}])$$

und aus (k)

$$[\mathfrak{r}_0 \operatorname{rot} \mathfrak{a}] = \tau(\mathfrak{r}_0[\mathfrak{r}_1\mathfrak{k}] \cdot \mathfrak{k} - \mathfrak{r}_0\mathfrak{k} \cdot [\mathfrak{r}_1\mathfrak{k}] - 2z[\mathfrak{r}_0\mathfrak{k}]).$$

Damit ergibt sich nach (24) $\mathfrak{E} = \mathsf{T}\mathfrak{r}_0$ mit

$$\mathsf{T} = \operatorname{def} \mathfrak{a} = \tau\,\frac{\mathfrak{k} \cdot [\mathfrak{r}_1\mathfrak{k}] + [\mathfrak{r}_1\mathfrak{k}] \cdot \mathfrak{k}}{2}.$$

Da $[\mathfrak{r}_1\mathfrak{k}] = r\mathfrak{i}_1$ ist, so stimmt dieser Ausdruck mit dem unter (q) angegebenen überein.

Die Drehung des Büschels $\mathfrak{r}_0$ am Endpunkt von $\mathfrak{r}_1$ ist bestimmt durch den alternierenden Teil des Affinors $\nabla \cdot \mathfrak{a}$, also durch den Drehachsenvektor

$$-\tfrac{1}{2}\operatorname{rot}\mathfrak{a} = \tau(z\mathfrak{k} - \tfrac{1}{2}\mathfrak{r}) = \tau(\mathfrak{r}_1 - \tfrac{3}{2}\mathfrak{r}).$$

Sein Betrag $$\vartheta = \tau\sqrt{z^2 + \frac{r^2}{4}} = \frac{\tau z}{\cos\psi},$$

wobei ψ seine Neigung gegen die Richtung $\mathfrak{k}$ bedeutet, gibt den Drehwinkel an. Zur Achse $\mathfrak{k}$ gehört die Komponente $\vartheta\cos\psi = \tau z$.

Aus den abgeleiteten Beziehungen ersehen wir folgendes:

Erstens ist ersichtlich, daß in dem betrachteten Körper ein heterogenes Tensorfeld besteht Weiter folgt aus (f), daß keine Volumenvergrößerung stattfindet. Dann lehrt (k), da $\mathfrak{C}$ nach (q) senkrecht zu $\mathfrak{r}$ ist und demnach auch die Dehnungen, daß jedes Volumenelement, als ganzes, eine Drehung $-\tau z \mathfrak{k} = -\varphi \mathfrak{k}$ um die $\mathfrak{k}$-Achse erlitten hat. Dieselbe Drehung wäre auch entstanden, wenn sich der Zylinder als starrer Körper um den Winkel $\tau z = \varphi$ in Richtung des Pfeiles (Fig. 7) gedreht hätte

Außerdem erleiden die Dehnungsachsen, wie wieder aus (f) folgt, eine Drehung $\frac{\tau \mathfrak{r}}{2}$ um $\mathfrak{r}$ im Sinne des Uhrzeigers. Dies kommt daher, daß sich die verschiedenen Schichten um verschiedene Winkel gedreht haben. Es werden hierbei zwischen den Schichten tangentiale Kräfte $\mathfrak{P}_t$ auftreten, die sich aus (t) berechnen, wenn man $\mathfrak{n} = \mathfrak{k} = \mathfrak{k}_1$ setzt.

(w) Dabei ist $$\mathfrak{P}_t = K \tau r \mathfrak{i}_1 .$$

Diesen Wert kann man auch direkt aus (36a) erhalten, wovon man sich leicht mit Hilfe von (c) und (k) uberzeugen kann.

Man bezeichnet K als den Torsions- oder Gestaltsmodul. Die Konstante τ mißt den Drall des Zylinders

Auf ein zu $\mathfrak{r}$ senkrechtes Flächenelement wirken keine Spannungen. Für Flächenelemente, deren Normalen senkrecht zu $\mathfrak{r}$ sind, werden die Spannungen durch die Fig. 8 dargestellt ($\mathfrak{r}$ ist senkrecht zur Zeichnung und weist zum Beschauer hin). Dies folgt aus (t) und (u). Aus (27) erhalten wir

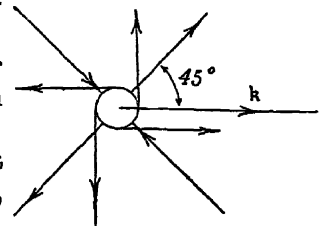



Fig 8.

(x) $$\mathfrak{A} = \mathfrak{i}_1' \mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{i}_1' \left(1 - \frac{\tau r}{2}\right) + \mathfrak{j}_1 \mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{j}_1 + \mathfrak{k}_1' \mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{k}_1' \left(1 + \frac{\tau r}{2}\right)$$

Fassen wir jetzt ein kugelformiges Volumenelement ins Auge. Der Mittelpunkt dieses Elementes erleidet bei der Verrückung eine Verschiebung $\mathfrak{a}_1 = \tau z [\mathfrak{r}\mathfrak{k}]$. Außerdem geht die Kugel wegen (x) in ein Ellipsoid über, dessen große Achse, langs der die größte Dehnung stattfindet, einen Winkel von 45° mit $\mathfrak{k}_1$ bildet, im Sinne des Uhrzeigers, wenn man längs $\mathfrak{r}$ blickt. Die mittlere Achse (Dehnung = 0) fällt mit $\mathfrak{r}$ zusammen. Längs der kleinsten Achse findet die starkste Zusammendrückung statt. Die Deformation ist raumtreu

Die Dehnungsachsen erleiden, wie schon erwähnt, eine Drehung $-\tau z \mathfrak{k}$ um $\mathfrak{k}$ und eine solche um $\mathfrak{r}$, die gleich $\frac{\tau \mathfrak{r}}{2}$ ist, also unabhängig von z

Da auf ein zu $\mathfrak{r}$ senkrechtes Flächenelement keine Spannungen wirken, so muß wegen (t) der Zylinder, wenn auch auf seine Mantelfläche keine Kräfte wirken sollen, ein Kreiszylinder sein

Wir wollen dies von jetzt ab annehmen und den Radius des Zylinders mit R bezeichnen.

Es folgt dann wegen (a) und (v) für die Formänderungsarbeit

$$\text{(y)}\quad A = K\int_0^\tau \tau\,\delta\tau \int_V r^2 dv = K 2\pi h \int_0^\tau \tau\,\delta\tau \int_0^R r^3 dr = \frac{K\pi h R^4 \tau^2}{4}.$$

Die Kraft $\mathfrak{P}_t$ in (w) hängt nicht von z ab, folglich ist sie gleich der auf f_2 (Fig. 7) und muß gleich sein den äußeren Kräften, damit die angenommene Verschiebung (e) zustande kommt Der Betrag des Momentes dieser Kraft ist

$$m = K\tau r^2 = \frac{K\tau h r^2}{h} = \frac{K\varphi r^2}{h}.$$

Infolgedessen ist die gesamte Arbeit bei der Verdrehung des Zylinders, da wir f_1 als fest angenommen haben,

$$A = \int_{f_2}\int_0^\varphi m\, d\varphi\, df = \frac{K\varphi^2 \pi R^4}{4h} = \frac{K\pi h R^4 \tau^2}{4},$$

d h. gleich dem Ausdruck (y). Der Betrag des gesamten Momentes

$$\text{(z)}\quad \text{ist}\qquad M = \int_{f_2} m\, df = \frac{K\pi\tau R^4}{2}$$

Da M nicht von h abhängt, so können wir die gewonnenen Resultate auch auf einen Kreiszylinder mit beliebigem h anwenden, indem wir den Zylinder in bekannter Weise in Schichten senkrecht zur Achse einteilen und unsre Erörterungen auf jede Schicht übertragen.

Wenn sich der Zylinder um die Achse $\mathfrak{k}$ mit der Winkelgeschwindigkeit ω dreht, so ist die Geschwindigkeit des Endpunktes von $\mathfrak{r}_1$

$$\mathfrak{x} = [\mathfrak{r}_1 \mathfrak{k}]\omega = r\omega \mathfrak{i}_1$$

und die Dichte des Energiestroms nach (13a)

$$\mathfrak{B} = -\Phi\mathfrak{x} = K\tau r^2 \omega \mathfrak{k}$$

IV. Flüssige Körper.

21. Verzerrungsgeschwindigkeiten und einige kinematische Betrachtungen. Wir denken uns die Lage jedes Flüssigkeitsteilchens der gesamten Flüssigkeit für den Zeitpunkt t gegeben und wollen im Sinne von Nr. 14 dies als erste Lage bezeichnen. Die entsprechende Geschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens sei nach Größe und Richtung durch $\mathfrak{v}$ bezeichnet. Die zweite Lage soll der entsprechen, die der Flussigkeit nach der sehr kleinen Zeit dt zukommt. Dann ist die Verrückung

$$\text{(a)} \qquad \mathfrak{a} = \mathfrak{v}\, dt$$

sehr klein, und wir können die in Nr. 14 für homogene Deformationen abgeleiteten Beziehungen hier anwenden, indem wir $\mathfrak{a}$ durch (a) gegeben annehmen.

Setzen wir deshalb fur $\mathfrak{a}$ in (28) und (29) Nr. 14 den Ausdruck (a) und teilen durch dt, was gestattet ist, da dt konstant für die ganze Flussigkeitsmenge ist, so erhalten wir

$$(1) \qquad \operatorname{div} \mathfrak{v} = \lambda_1' + \lambda_2' + \lambda_3' = D',$$

wo demnach D' die Geschwindigkeit der Volumenvergrößerung bedeutet und die λ' die Dehnungsgeschwindigkeiten längs den Achsen des Verzerrungsellipsoids. Es ist also

$$\text{(b)} \qquad \lambda = \lambda'\, dt.$$

Ebenso erhalten wir für die Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ der Dehnungsachsen bei Berücksichtigung des im Anschluß an (q) Nr 14 Gesagten

$$\text{(c)} \qquad \mathfrak{w} = \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} \mathfrak{v}$$

und statt (24) Nr. 14 für den el. V der Verzerrungsgeschwindigkeiten

$$(2) \qquad \mathfrak{C}' = (\mathfrak{r}_0 \nabla)\mathfrak{v} + \tfrac{1}{2}[\mathfrak{r}_0 \operatorname{rot} \mathfrak{v}] = \mathfrak{i}\mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{i}\lambda_1' + \mathfrak{j}\mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{j}\lambda_2' + \mathfrak{k}\mathfrak{r}_0 \cdot \mathfrak{k}\lambda_3',$$

$$\text{(d)} \quad \text{wo} \qquad \mathfrak{C} = \mathfrak{C}'\, dt$$

ist. Hier fallen, wie auch in Nr. 14, $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ mit den Richtungen der Dehnungsachsen eines Volumenelementes der Flüssigkeit im Zeitpunkt t zusammen

Wir wollen uns dieses Volumenelement als Kugel denken und während der Zeit t bis $t + dt$ verfolgen. Aus den nach (26) Nr. 14 folgenden Erörterungen ersehen wir, daß sich diese Kugel in ein Ellipsoid deformiert, dessen Achsen die Dehnungsachsen sind. Dieses Ellipsoid verschiebt sich als starrer Körper um $\mathfrak{a} = \mathfrak{v}\, dt$ und erfährt

nachträglich eine Drehung $\mathfrak{w}\,dt$ um den Mittelpunkt. Diese Betrachtungen können wir auf alle Volumenelemente übertragen; wir haben somit den Übergang der Flüssigkeit von der ersten in die zweite Lage, d. h von t bis $t + dt$, verfolgt.

Wir wollen jetzt diese zweite Lage als erste betrachten und als zweite die, die dem Zeitpunkt $t + 2\,dt$ entspricht. Fassen wir wieder unser kugelförmiges Volumenelement ins Auge, so sehen wir, daß es in dieser neuen ersten Lage eine andere Stelle des Raumes eingenommen hat, zu einem Ellipsoid verwandelt ist und sich um $\mathfrak{w}\,dt$ gedreht hat, wodurch die Lage der Dehnungsachsen bestimmt ist Aus diesem Ellipsoid schneiden wir eine Kugel heraus mit dem Mittelpunkt im Mittelpunkt des Ellipsoids und verfolgen nun die Bewegung und Deformation dieser Kugel zwischen den Zeitpunkten $t + dt$ und $t + 2\,dt$. Aus der Kugel wird wieder ein Ellipsoid, dessen Achsen die neuen Dehnungsachsen sind. Diese Achsen brauchen aber nicht mit den früheren Dehnungsachsen zusammenzufallen, d. h. sie können durch andere Teilchen der Flüssigkeit gehen

Es werden sich also im allgemeinen die Dehnungsachsen relativ zu den Teilchen gedreht haben. Bezeichnen wir die Werte von $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ für den Zeitpunkt $t + dt$ mit $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{w}_1$, so erfährt das letztbetrachtete Ellipsoid eine Parallelverschiebung $\mathfrak{v}_1\,dt$ und eine Drehung $\mathfrak{w}_1\,dt$.

Zerteilen wir jetzt ein endliches Zeitintervall in sehr kleine Zeitelemente, so können wir die Bewegung eines Volumenelementes binnen einer endlichen Zeit verfolgen immer von einer Kugel zum Ellipsoid, dann wieder von einer Kugel zum Ellipsoid usw. Unter Berücksichtigung von dem im Anfang Nr. **14** Gesagten, daß wir uns ebensogut erst die Kugel verschoben und gedreht und dann zum Ellipsoid deformiert denken können, kommen wir hierbei zu folgender Anschauung von der Bewegung einer Flüssigkeit.

Der Mittelpunkt der Kugel und des Ellipsoids, der ständig mit einem bestimmten Punkt der Flüssigkeit verbunden bleibt, bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$. Die Dehnungsachsen drehen sich relativ zur Kugel und außerdem zusammen mit der Kugel und dem Ellipsoid mit einer Geschwindigkeit $\mathfrak{w}$, die für jeden Augenblick dem zum Mittelpunkt gehörenden Wert von $\frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathfrak{a}$ gleich ist. Ist im besondern ständig $\mathfrak{w} = 0$, so besagt dies, daß es nur eine zur Kugel relative Drehung der Dehnungsachsen geben kann, während die Kugel und das Ellipsoid sich nicht drehen werden.

Wir haben deshalb bei der Bewegung einer Flüssigkeit folgende Ausdrücke zu beachten

(e) $$\operatorname{div} \mathfrak{v} = D'$$

(f) und $$\mathfrak{w} = \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} \mathfrak{v}.$$

22. Beziehungen zwischen substanziellen, lokalen und stationären Änderungen In Nr 21 verfolgten wir die Bewegung eines Flussigkeitselementes und sahen, daß gegen dieses sich $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ ständig änderten. Eine solche Änderung bezeichnet man als substanzielle. Anderseits kann man auch einen Punkt des Raumes festhalten und daselbst die sogenannten lokalen Änderungen untersuchen. Im allgemeinen können wir also von einer substanziellen und von einer lokalen Änderung einer Eigenschaft eines sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bewegenden Trägers sprechen Diese Eigenschaft kann vektorischer Natur sein, wie z. B $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$, oder skalarer Natur, wie z. B. die Dichte

Die lokale Änderung, bezogen auf die Zeiteinheit, bezeichnen wir mit $\frac{\partial}{\partial t}$ und die substantielle mit $\frac{d}{dt}$.

Wir denken uns jetzt einen Träger mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und den Eigenschaften, die durch a und $\mathfrak{A}$ ausgedrückt sein sollen Dieser Träger stellt demnach ein Feld der Großen a und $\mathfrak{A}$ vor, das mit der Zeit veränderlich ist.

Bezeichnen wir mit a_1 und $\mathfrak{A}_1$ die Werte von a und $\mathfrak{A}$ für einen Punkt P des Raumes im Moment t, so waren diese Großen im Moment $t - dt$, im Punkte P,

(a) $$a_1' = a_1 - \frac{\partial a}{\partial t} \cdot dt, \quad \mathfrak{A}_1' = \mathfrak{A}_1 - \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} dt.$$

Für einen anderen Punkt P' des Raumes, der von P in der sehr kleinen Entfernung $d\mathfrak{r}$ liegt, erhalten wir, auch für den Moment $t - dt$, unter Vernachlässigung von kleinen Größen höherer Ordnung,

(b) $$\begin{cases} a_1'' = a_1' + d\mathfrak{r}\nabla a_1' = a_1 - \frac{\partial a}{\partial t} dt + d\mathfrak{r}\nabla a \\ \mathfrak{A}_1'' = \mathfrak{A}_1' + d\mathfrak{r}\nabla \cdot \mathfrak{A}_1' = \mathfrak{A}_1 - \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} dt + d\mathfrak{r}\nabla \ \mathfrak{A}. \end{cases}$$

Bezeichnet P' den Punkt des Raumes, wo sich das Teilchen, das sich im Moment t in P befindet, im Moment $t - dt$ befunden hat, so ist $d\mathfrak{r} = -\mathfrak{v}\,dt$. Hieraus ergeben sich die substantiellen Änderungen zu $\frac{da}{dt} = -\frac{a_1'' - a_1}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = -\frac{\mathfrak{A}_1'' - \mathfrak{A}_1}{dt}$

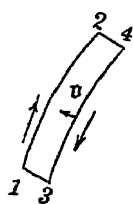
oder wegen (a) und (b)

$$(3)\qquad \frac{d a}{d t}=\frac{\partial a}{\partial t}+\mathfrak{v} \nabla a, \quad \frac{d \mathfrak{A}}{d t}=\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}+\mathfrak{v} \nabla \cdot \mathfrak{A}.$$

Die zweiten Glieder auf der rechten Seite nennt man stationäre Änderungen. Deshalb ist die substantielle Änderung gleich der Summe der lokalen und der stationären Änderung.

Wir wollen jetzt die Änderung der Integrale

$$C=\int_{l} \mathfrak{A} \, d \mathfrak{r} \qquad \text{und} \qquad B=\int_{f} \mathfrak{A} \, d \mathfrak{f}$$

berechnen unter der Voraussetzung, daß sich l und f zusammen mit dem Träger bewegen und sich hierbei deformieren.

Es sei 12 die Kurve l (Fig 9) im Moment t und 34 dieselbe Kurve im Moment $t-dt$. Das Linienintegral längs 12 für den Moment $t-dt$ ist

$$(c)\qquad C_1=\int_1^2 \mathfrak{A} \, d \mathfrak{r}-\int_1^2 \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \, d \mathfrak{r} \, d t,$$

Fig 9

wenn sich $\mathfrak{A}$ und ebenso $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t}$ auf den Moment t beziehen.

Verbinden wir jetzt 1 mit 3 und 2 mit 4, so daß 13 und 24 uns die Wege der Endpunkte von l in der Zeit dt angeben, und nehmen das Linienintegral längs der geschlossenen Kurve 1243 in Richtung der Pfeile für den Moment $t-dt$, so erhalten wir aus (c) und dem Stokesschen Satz

$$(d)\qquad \int \operatorname{rot} \mathfrak{A} \, d \mathfrak{f}-\int \operatorname{rot} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \, d \mathfrak{f} \, d t=C_1-\int_4^2 \mathfrak{A}' \, d \mathfrak{r}+\int_3^1 \mathfrak{A}' \, d \mathfrak{r}-\int_3^4 \mathfrak{A}'' \, d \mathfrak{r},$$

(e) wo

$$\mathfrak{A}'=\mathfrak{A}-\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} \, d t$$

bedeutet und $\mathfrak{A}''$ den Wert von $\mathfrak{A}$ auf 34 im Moment $t-dt$. Hieraus folgt, daß das letzte Integral in (d) nichts anderes ist als der Wert C' von C für die Lage der Kurve l im Moment $t-dt$. Deshalb ist die gesuchte Änderung von C, auf die Zeiteinheit bezogen,

$$(f)\qquad \frac{d C}{d t}=\frac{C-C'}{d t}.$$

Die positive Richtung von $d\mathfrak{f}$ ist durch die Umlaufsrichtung gegeben, und wir können infolge der Richtung von $\mathfrak{v}$ (Fig. 9) schreiben

$$(g)\qquad d \mathfrak{f}=[\mathfrak{v} \, d \mathfrak{r}] \, d t.$$

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ die Geschwindigkeiten der Bewegung der Endpunkte von l, so können wir im ersten und zweiten Integral auf der rechten Seite von (d) $d\mathfrak{r}$ durch $\mathfrak{v}_1 dt$ und $\mathfrak{v}_2 dt$ ersetzen. Wegen der Kleinheit von 13 und 24 können wir $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{v}_2$ und ebenso die Werte von $\mathfrak{A}$ daselbst als konstant annehmen und letztere gleich $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ setzen. Hieraus und aus (g) erhalten wir statt (d) unter Vernachlässigung von kleinen Größen höherer Ordnung

$$\text{(h)}\quad C' = \int_3^4 \mathfrak{A}'' d\mathfrak{r} = (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{v}_1 - \mathfrak{A}_2 \mathfrak{v}_2)\, dt + C_1 - \int_1^2 [\operatorname{rot} \mathfrak{A}\,\mathfrak{v}]\, d\mathfrak{r}\, dt,$$

oder da
$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{v}_1 - \mathfrak{A}_2 \mathfrak{v}_2 = -\int_1^2 d\mathfrak{r} \nabla \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{v}$$

ist, so folgt hieraus und aus (h) und (f)

$$\text{(4)}\qquad \frac{d}{dt}\int_l \mathfrak{A}\, d\mathfrak{r} = \int_l \left\{\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathfrak{A}\mathfrak{v} + [\operatorname{rot} \mathfrak{A}\,\mathfrak{v}]\right\} d\mathfrak{r}.$$

Haben wir es mit einer geschlossenen Kurve L zu tun, so wird $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{v}_1 = \mathfrak{A}_2 \mathfrak{v}_2$ und

$$\text{(5)}\qquad \frac{d}{dt}\int_L \mathfrak{A}\, d\mathfrak{r} = \int_L \left\{\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + [\operatorname{rot} \mathfrak{A}\,\mathfrak{v}]\right\} d\mathfrak{r}.$$

Ebenso erhalten wir den Ausdruck $\frac{dB}{dt}$, wenn wir den Gaußschen Satz auf die Oberfläche des Raumes anwenden, den die Fläche f innerhalb der Zeitpunkte $t - dt$ und t bestrichen hat, wenn wir noch das Linienintegral längs der Randkurve von f mit Hilfe des Stokesschen Satzes in ein Flächenintegral über die Fläche f umformen:

Es ist

$$\text{(6)}\qquad \frac{d}{dt}\int_f \mathfrak{A}\, d\mathfrak{f} = \int_f \left\{\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{A} + \operatorname{rot} [\mathfrak{A}\mathfrak{v}]\right\} d\mathfrak{f}$$

Ist die Oberfläche geschlossen, so folgt hieraus mit Hilfe von (88) I

$$\text{(7)}\qquad \frac{d}{dt}\int_F \mathfrak{A}\, d\mathfrak{f} = \int_F \left\{\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} + \mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{A}\right\} d\mathfrak{f}$$

oder nach dem Gaußschen Satz

$$\text{(8)}\qquad \frac{d}{dt}\int_V \operatorname{div} \mathfrak{A}\, dv = \int_V \left\{\frac{\partial \operatorname{div} \mathfrak{A}}{\partial t} + \operatorname{div} (\mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{A})\right\} dv.$$

Setzen wir jetzt div $\mathfrak{A} = a$ und verstehen unter a einen beliebigen Skalar, so liefert (8)

$$(9)\quad \frac{d}{dt}\int_V a\,dv = \int_V \left\{\frac{\partial a}{\partial t} + \operatorname{div} a\mathfrak{v}\right\} dv = \int_V \frac{\partial a}{\partial t}\,dv + \int_F a\mathfrak{v}\,d\mathfrak{f}$$

23. Kontinuitätsgleichung. Bewegungsgleichungen einer Flüssigkeit. Setzen wir in (9) $a =$ konst, nehmen v als sehr klein an, teilen (9) durch v und gehen dann zur Grenze $v = 0$ über, so erhalten wir

$$(a)\qquad \frac{dv}{v\,dt} = \operatorname{div}\mathfrak{v} = D',$$

d. h. die Geschwindigkeit der Volumenvergrößerung. Ist die Dichte im betreffenden Punkt der Flussigkeit gleich ϱ, so wird das kleine Volumen v ständig die Masse ϱv enthalten. Es ist deshalb

$$\frac{d\varrho v}{dt} = 0 = \varrho\frac{dv}{dt} + v\frac{d\varrho}{dt}.$$

Die Division dieses Ausdruckes durch v ergibt wegen (a)

$$(10)\qquad \frac{d\varrho}{dt} + \varrho\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0$$

oder wegen (3)

$$(10a)\qquad \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \mathfrak{v}\nabla\varrho + \varrho\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0$$

oder endlich infolge von (54) I

$$(10b)\qquad \frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\varrho\mathfrak{v} = 0.$$

Gleichung (10) nennt man die Kontinuitätsgleichung einer Flüssigkeit.

Wir gehen jetzt zu der Bewegungsgleichung einer Flüssigkeit uber.

Solange wir die Reibung vernachlässigen, können wir von Kräften absehen, die auf ein innerhalb der Flussigkeit gelegenes Flächenelement tangential wirken. Es kommen nur Normalspannungen vor, die hier als Drucke auftreten.

Wir erhalten deshalb als Spannung

$$(11)\qquad \mathfrak{P} = -p\mathfrak{n}$$

und aus (1) Nr. 11 infolge von (44) I als Volumenkraft

$$(12)\qquad \mathfrak{K} = -\nabla p.$$

Demnach schreiben wir statt (2) Nr. 11

$$\varrho \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \varrho \mathfrak{G} - \nabla p, \tag{13}$$

oder da hier die substantielle Änderung gemeint ist,

$$\varrho \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \varrho\, \mathfrak{v} \nabla \cdot \mathfrak{v} = \varrho \mathfrak{G} - \nabla p \tag{13a}$$

oder endlich infolge von (70) I

$$\varrho \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \varrho \frac{\nabla \mathfrak{v}^2}{2} - \varrho\, [\mathfrak{v} \operatorname{rot} \mathfrak{v}] = \varrho \mathfrak{G} - \nabla p. \tag{13b}$$

Berücksichtigen wir noch (f) Nr 21, so können wir statt (13b) auch schreiben

$$\varrho \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \varrho \frac{\nabla \mathfrak{v}^2}{2} - 2\varrho\, [\mathfrak{v} \mathfrak{w}] = \varrho \mathfrak{G} - \nabla p. \tag{13c}$$

Die Gleichungen (13) stellen die gewöhnlichen hydrodynamischen Gleichungen einer reibungslosen Flüssigkeit in der sogenannten Eulerschen Form dar.

Ist es nicht gestattet die Reibung zu vernachlässigen, so muß man die tangentialen Kräfte berücksichtigen. Man nimmt in diesem Fall an, ähnlich wie bei den Spannungen in Nr. 15, daß die Hauptdrucke mit den Richtungen der Dehnungsachsen zusammenfallen und lineare Funktionen der Dehnungsgeschwindigkeiten λ_1', λ_2' und λ_3' sind Und zwar setzt man

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_1 &= -p - \tfrac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathfrak{v} + 2\mu\lambda_1' \\ \sigma_2 &= -p - \tfrac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathfrak{v} + 2\mu\lambda_2' \\ \sigma_3 &= -p - \tfrac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathfrak{v} + 2\mu\lambda_3', \end{aligned}\right. \tag{14}$$

wo μ den Koeffizienten der inneren Reibung bedeutet, oder in Tensorform geschrieben, wie aus (14) oder aus (15) und (16) ersichtlich,

$$\begin{aligned} \Phi &= -p + 2\mu(\mathrm{T} - \tfrac{1}{3} \operatorname{div} \mathfrak{v}) \\ &= -p + 2\mu(\operatorname{def} \mathfrak{v} - \tfrac{1}{3} \operatorname{div} \mathfrak{v}) \end{aligned} \tag{14a}$$

Der erste Skalar von Φ ist $= -3p$ Denn der erste Skalar der Klammer ist $= \operatorname{div} \mathfrak{v} - \operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{C}_1'$ einen el. V., der aus (2) gebildet wird, indem $\mathfrak{r}_0$ durch $\mathfrak{n}$ ersetzt wird, so ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_1' &= \mathfrak{n} \nabla \cdot \mathfrak{v} + \tfrac{1}{2}[\mathfrak{n} \operatorname{rot} \mathfrak{v}] = \mathfrak{n} \nabla \cdot \mathfrak{v} + [\mathfrak{n} \mathfrak{w}] = \\ &= \mathfrak{i}\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{i}\lambda_1' + \mathfrak{j}\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{j}\lambda_2' + \mathfrak{k}\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{k}\lambda_3'. \end{aligned} \tag{15}$$

Deshalb folgt aus (9) Nr. 12, (14) und (15)

$$(16)\qquad \mathfrak{P} = -\mathfrak{n}\left(p + \tfrac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathfrak{v}\right) + 2\mu \mathfrak{C}_1' \quad \text{oder}$$

$$(16\text{a})\qquad \mathfrak{P} = -\mathfrak{n}\left(p + \tfrac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathfrak{v}\right) + 2\mu\mathfrak{n}\nabla\cdot\mathfrak{v} + \mu[\mathfrak{n} \operatorname{rot} \mathfrak{v}].$$

Dem el. V. $\mathfrak{C}_1' - \frac{1}{3}\mathfrak{n} \operatorname{div} \mathfrak{v}$ entspricht ein Tensor mit verschwindendem ersten Skalar (ein „Deviator" nach Schouten). Dieser Tensor bestimmt die Flussigkeitsreibung.

Analog (36a) und (35a) Nr. 15 erhalten wir für die normale Kraft $\mathfrak{N}$ und die tangentiale Kraft $\mathfrak{T}$ die Ausdrücke

$$(17)\qquad \mathfrak{N} = -\mathfrak{n}\left(p + \tfrac{2}{3}\mu \operatorname{div} \mathfrak{v}\right) + 2\mu\mathfrak{n}\nabla(\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{v}\mathfrak{n})$$

$$(18)\quad \text{und}\qquad \mathfrak{T} = \mu[\mathfrak{n} \operatorname{rot} \mathfrak{v}] + 2\mu\mathfrak{n}\nabla\cdot[\mathfrak{n}[\mathfrak{v}\mathfrak{n}]].$$

Erinnern wir uns des Überganges von (33) zu (37) Nr. 15, so können wir wegen (16a) statt (2) Nr. 11 schreiben

$$(19)\left\{\begin{aligned} &\varrho\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \varrho\frac{\nabla\mathfrak{v}^2}{2} - \varrho[\mathfrak{v} \operatorname{rot} \mathfrak{v}] = \varrho\mathfrak{G} - \nabla p - \tfrac{2}{3}\mu\nabla \operatorname{div} \mathfrak{v} + \\ &\qquad\qquad + 2\mu\nabla^2\mathfrak{v} + \mu \operatorname{rot}^2 \mathfrak{v}\end{aligned}\right.$$

unter der Voraussetzung, daß μ konstant ist. Statt (19) erhalten wir wegen (79a) I

$$(19\text{a})\qquad \varrho\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + \varrho\frac{\nabla\mathfrak{v}^2}{2} - \varrho[\mathfrak{v} \operatorname{rot} \mathfrak{v}] = \varrho\mathfrak{G} - \nabla p + \frac{\mu}{3}\nabla \operatorname{div} \mathfrak{v} + \mu\nabla^2\mathfrak{v}.$$

Ist $\mu = 0$, so gehen die Gleichungen (16) und (19) in (11) und (13b) über

24. Energiegleichungen. Wir nehmen jetzt an, die Fernkraft $\mathfrak{G}$ sei konservativer Natur, d h. von einem Potential $-\omega$ ableitbar, wie z. B die Schwerkraft.

Dann ist die potentielle Energie einer Volumeneinheit der Flüssigkeit $\varrho\omega$ und

$$(\text{a})\qquad \mathfrak{G} = -\nabla\omega.$$

$$(\text{b})\quad \text{Außerdem ist}\qquad \frac{\partial\omega}{\partial t} = 0,$$

d h für denselben Punkt des Raumes ist die potentielle Energie der Masseneinheit der Flüssigkeit konstant.

Die kinetische Energie der Volumeneinheit der Flüssigkeit ist $\frac{\varrho\mathfrak{v}^2}{2}$. Deshalb ist die ganze Energie pro Volumeneinheit

$$(\text{c})\qquad e = \frac{\varrho\mathfrak{v}^2}{2} + \varrho\omega$$

und die der gesamten Flüssigkeit

$$E = \int_V e\,dv. \tag{d}$$

Wir bestimmen jetzt $\frac{dE}{dt}$ unter der Voraussetzung, daß sich innerhalb V immer dieselbe Flüssigkeitsmenge befindet, d. h die Oberfläche F von V bewegt sich mit der Flüssigkeit.

Ersetzen wir a in (9) durch e, so folgt

$$\frac{dE}{dt} = \int_V \left\{ \frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} e\mathfrak{v} \right\} dv \tag{e}$$

oder unter Berücksichtigung von (a), (b), (c) und (10a)

$$\frac{dE}{dt} = -\int_V \varrho\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{G}\,dv + \int_V \left(\frac{\varrho}{2} \frac{\partial \mathfrak{v}^2}{\partial t} + \frac{\varrho\,\mathfrak{v}}{2} \nabla\,\mathfrak{v}^2 \right) dv. \tag{f}$$

Multiplizieren wir (19a) skalar mit $\mathfrak{v}$ und setzen den so erhaltenen Ausdruck in (f) ein, so erhalten wir

$$\frac{dE}{dt} = \int_V \left\{ \frac{\mu}{3}\,\mathfrak{v}\,\nabla \operatorname{div} \mathfrak{v} + \mu\,\mathfrak{v}\,\nabla^2 \mathfrak{v} - \mathfrak{v}\,\nabla p \right\} dv. \tag{20}$$

Infolge von (74) I ist

$$2\,\mathfrak{v}\,(\mathfrak{n}\nabla \cdot \mathfrak{v}) = \mathfrak{n}\nabla \cdot \mathfrak{v}^2, \tag{g}$$

und außerdem haben wir

$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{v}\,\nabla \operatorname{div} \mathfrak{v} &= \operatorname{div} (\mathfrak{v} \operatorname{div} \mathfrak{v}) - (\operatorname{div} \mathfrak{v})^2 \\ \mathfrak{v} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{v} &= \operatorname{div} [\operatorname{rot} \mathfrak{v}\,\mathfrak{v}] + (\operatorname{rot} \mathfrak{v})^2 \\ \mathfrak{v}\,\nabla p &= \operatorname{div} \mathfrak{v}\,p - p \operatorname{div} \mathfrak{v} \end{aligned} \right. \tag{h}$$

Ersetzen wir (vgl (79a) I) in (20) $\mathfrak{v}\,\nabla^2 \mathfrak{v}$ durch

$$-\,\mathfrak{v}\,\nabla^2 \mathfrak{v} + 2\,\mathfrak{v}\,\nabla^2 \mathfrak{v} = \mathfrak{v} \operatorname{rot}^2 \mathfrak{v} - \mathfrak{v}\,\nabla \operatorname{div} \mathfrak{v} + 2\,\mathfrak{v}\,\nabla^2 \mathfrak{v},$$

so erhalten wir auf Grund von (g), (h) und (16a) mit Hilfe des Gauß schen Satzes nach einigen leichten Umformungen

$$\frac{dE}{dt} = \int_F \mathfrak{P}\,\mathfrak{v}\,df + \int_V p \operatorname{div} \mathfrak{v}\,dv - \int_V W\,dv, \tag{21}$$

wo

$$W = \mu \left\{ \operatorname{div} \nabla\,\mathfrak{v}^2 - 2\,\mathfrak{v}\,\nabla^2 \mathfrak{v} - (\operatorname{rot} \mathfrak{v})^2 - \tfrac{2}{3} (\operatorname{div} \mathfrak{v})^2 \right\}. \tag{22}$$

Ebenso, wie wir in Nr. 16 von (40) zu (42) übergegangen sind, können wir auch hier mit Hilfe von $\mathfrak{C}'$ Nr. 21 statt (22) schreiben

$$W = 2\mu(\lambda_1'^2 + \lambda_2'^2 + \lambda_3'^2) - \frac{2\mu}{3}(\operatorname{div}\mathfrak{v})^2 \quad \text{oder} \tag{23}$$

$$W = \tfrac{2}{3}\mu\{(\lambda_1' - \lambda_2')^2 + (\lambda_1' - \lambda_3')^2 + (\lambda_2' - \lambda_3')^2\} \tag{23a}$$

Ist die Flüssigkeit inkompressibel, also $\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0$, so haben wir

$$-2\,\mathfrak{v}\nabla^2\mathfrak{v} = 2\,\mathfrak{v}\operatorname{rot}^2\mathfrak{v} \qquad \text{oder wegen (h)}$$

$$-2\,\mathfrak{v}\nabla^2\mathfrak{v} = 2\operatorname{div}[\operatorname{rot}\mathfrak{v}, \mathfrak{v}] + 2(\operatorname{rot}\mathfrak{v})^2. \tag{i}$$

Infolgedessen erhalten wir für diesen Fall aus (22), (g) und mit Hilfe des Gauß schen Satzes

$$\left\{\begin{aligned} \int\limits_V W\,dv &= 2\mu\int\limits_F \mathfrak{v}(\mathfrak{n}\nabla\cdot\mathfrak{v}) + \\ &+ 2\mu\int\limits_F \mathfrak{v}[\mathfrak{n}\operatorname{rot}\mathfrak{v}]\,df + \mu\int\limits_V(\operatorname{rot}\mathfrak{v})^2\,dv. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Wir wollen jetzt die lokale Änderung von E bestimmen, d. h $\frac{\partial E}{\partial t}$. In diesem Fall bedeutet V ein Volumen des Raumes mit unbeweglicher Oberfläche F. Es ist also

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int\limits_V \frac{\partial e}{\partial t}\,dv. \tag{k}$$

Aus (9) und (21) oder auch aus (e) folgt

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\int\limits_F e\mathfrak{v}\,d\mathfrak{f} + \int\limits_F \mathfrak{P}\mathfrak{v}\,df + \int\limits_V p\operatorname{div}\mathfrak{v}\,dv - \int\limits_V W\,dv \tag{25}$$

In (21) bewegt sich F mit der Flüssigkeit. Es findet also keine Strömung durch F statt. In (25) haben wir eine Stromung durch F, da diese Fläche unbeweglich ist. Nehmen wir auf F in (21) $\mathfrak{v} = 0$ an, so ist dort F als unbeweglich zu betrachten, und es muß sein

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Dies bestätigt auch ein Vergleich von (21) und (25).

Nehmen wir außerdem die Flüssigkeit als inkompressibel und homogen an, so ist $\frac{\partial \varrho\omega}{\partial t} = 0$ wegen (b) und weil ϱ = konst. ist; und wir erhalten aus (21), (25) und (c)

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} = -\int\limits_V W\,dv, \tag{26}$$

wo L die gesamte kinetische Energie bedeutet

Nach (24) können wir statt (26) auch schreiben

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} = -\mu \int\limits_V (\operatorname{rot} \mathfrak{v})^2\,dv. \tag{26a}$$

Diese Beziehung ist also gültig für eine inkompressible homogene Flüssigkeit innerhalb eines Volumens V mit unbeweglicher Oberfläche, auf der $\mathfrak{v} = 0$ ist.

Wir kehren jetzt zur Gleichung (25) zurück und nehmen an, daß innerhalb der unbeweglichen Oberfläche F die Strömung stationär ist Dann verschwindet die linke Seite von (25), und wir erhalten

$$\int\limits_F e\,\mathfrak{v}\,d\mathfrak{f} = \int\limits_F \mathfrak{P}\,\mathfrak{v}\,d\mathfrak{f} + \int\limits_V p \operatorname{div} \mathfrak{v}\,dv - \int\limits_V W\,dv \tag{27}$$

Ist die Flüssigkeit inkompressibel, so folgt hieraus und aus (24) und (16a)

$$\left\{\begin{aligned} \int\limits_F e\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{n}\,df &= -\int\limits_F p\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{n}\,df - \\ &\quad - \mu \int\limits_F \mathfrak{v}\,[\mathfrak{n} \operatorname{rot} \mathfrak{v}]\,df - \mu \int\limits_V (\operatorname{rot} \mathfrak{v})^2\,dv. \end{aligned}\right. \tag{27a}$$

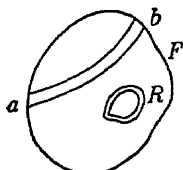
Aus (23a) ergibt sich, daß W wesentlich positiv ist. Diese Funktion zeigt die *Zerstreuung* der Energie infolge der Reibung pro Volumen- und Zeiteinheit an und folglich die Geschwindigkeit der Erzeugung von Wärme. Das erste Glied rechter Hand in (21) stellt die Arbeit der äußeren Oberflächenkräfte dar, und das zweite Glied ist die Arbeitsleistung des inneren Druckes bei der Ausdehnung der Flüssigkeit

25. Strömung und Zirkulation. Wirbel und Quellen. Das Linienintegral der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ längs einer Kurve nennt man die *Strömung* der Flüssigkeit entlang der Kurve Im Falle einer geschlossenen Kurve heißt der Wert des Integrals die *Zirkulation* in dieser Kurve. Ist die Zirkulation überall gleich Null, so bedeutet dies nach Nr. 20 I, daß die Geschwindigkeit ein Potential besitzt. Die Flüssigkeit selbst hat eine *Potentialbewegung*, und das Feld des Vektors $\mathfrak{v}$ ist ein lamellares Ist nur in einem Teil der Flüssig-

keit rot $\mathfrak{v} = 0$, während in dem anderen rot $\mathfrak{v} \neq 0$ ist, so wissen wir aus Nr. 23 I und folg., daß bei Stetigkeit von $\mathfrak{v}$ beide Teile einen mehrfach zusammenhängenden Raum bilden müssen.

Bedeutet F in Fig. 10 die Oberfläche der Flüssigkeit, so kann der Raumteil, wo rot $\mathfrak{v} \neq 0$ ist, z. B. aus einer Röhre ab bestehen, die an der Oberfläche der Flüssigkeit ihren Anfang und ihr Ende hat, oder aus einem geschlossenen Ring R usw.

Fig 10

Die Zirkulation in einer Kurve um die Röhre herum ist

$$\text{(a)} \qquad \int\limits_L \mathfrak{v}\, d\mathfrak{r} = \int\limits_f \operatorname{rot} \mathfrak{v}\, d\mathfrak{f},$$

wo f den Querschnitt der Röhre bedeutet, gebildet durch eine Fläche mit L als Randkurve.

Liegt L ganz auf der Oberfläche der Röhre, so ändert sich die rechte Seite von (a) nicht. Da aber nach Voraussetzung die Zirkulation nicht Null ist, so folgt hieraus, daß die Summe der zur Oberfläche des Rohres tangentialen Komponenten von $\mathfrak{v}$, jede multipliziert mit dem entsprechenden Linienelement, nach einer Richtung hin überwiegt. D. h. die Flüssigkeit innerhalb des Rohres hat eine Tendenz, sich um die Achse des Rohres zu drehen. Nach der drehenden Bewegung des Wassers, die wir oft Gelegenheit haben zu beobachten und die unter dem Namen „Wirbel“ bekannt ist, bezeichnet man jene Bewegung der Flüssigkeit innerhalb der Röhre als wirbelnde.

Als Maß des Wirbels, auf die Einheit der Fläche bezogen, nimmt man wegen (a) und (f) Nr. 21 den Vektor $\mathfrak{w}$ an und bezeichnet ihn schlechtweg als Wirbel.[1])

Es ist deshalb

$$\text{(b)} \qquad \text{Zirkulation} = \int\limits_L \mathfrak{v}\, d\mathfrak{r} = 2 \int\limits_f \mathfrak{w}\, d\mathfrak{f}.$$

Wir können demnach den Teil des Feldes, wo rot $\mathfrak{v} \neq 0$ ist, als wirbelhaft bezeichnen und den, wo rot $\mathfrak{v} = 0$ ist, wo also ein Geschwindigkeitspotential existiert, als wirbelfrei. Deshalb ist ab oder R in Fig. 10 eine ungeschlossene oder geschlossene Wirbelröhre. Ist der Querschnitt einer solchen Wirbelrohre klein, so spricht man von einem Wirbelfaden. Das Produkt $\mathfrak{w}\, d\mathfrak{f}$ nennt man die Stärke eines Wirbelfadens.

Wie man für $\mathfrak{v}$ die Vektorlinien ziehen kann, ist dies auch für $\mathfrak{w}$ innerhalb einer Wirbelröhre möglich. Diese Wirbellinien werden

1) Einige Autoren bezeichnen als Wirbel: $2\mathfrak{w} = \operatorname{rot} \mathfrak{v}$.

niemals aus der Wirbelrohre heraustreten können Denn ware dies der Fall, so hatte $\mathfrak{w}$ eine zur Oberfläche der Röhre normale Komponente, und infolgedessen wäre nach dem Stokesschen Satz die Zirkulation nicht Null in jeder Kurve, die auf der Oberfläche der Röhre liegt, ohne die Röhre zu umschlingen. Deshalb sind die Wirbellinien geschlossene Kurven oder endigen an der Oberflache der Flussigkeit.

Die Oberflache eines Wirbelfadens wird aus Wirbellinien gebildet, die man sich durch die Randkurve von $d\mathfrak{f}$ gezogen denken muß. Hieraus folgt sofort mit Hilfe analoger Überlegungen wie in Nr. 29 I, da $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathfrak{v} = 0$ ist, daß die Stärke des Wirbelfadens entlang dem Faden konstant ist und der Betrag des Wirbels umgekehrt proportional dem Querschnitt des Fadens.

Diese Erorterungen gelten selbstverständlich nur fur einen bestimmten Zeitpunkt Im nächsten Moment können sich die Verhältnisse ändern und insbesondere die Beziehungen zwischen dem wirbelnden und wirbelfreien Teil des Feldes. So z. B. kann ein wirbelndes Flussigkeitsteilchen aufhoren zu wirbeln und umgekehrt ein wirbelfreies Teilchen zu wirbeln anfangen

Wir wenden uns jetzt zur Gleichung (10) Aus ihr folgt

$$\frac{d\varrho}{dt} = -\varrho \operatorname{div} \mathfrak{v}$$

Ist also $\operatorname{div} \mathfrak{v} > 0$, so bedeutet dies, daß die Dichte abnimmt, und zwar deshalb, weil in der Zeiteinheit aus der Volumeneinheit um $\varrho \operatorname{div} \mathfrak{v}$ mehr Flüssigkeit ausströmt als in sie einströmt.

Wir denken uns jetzt eine Quelle von unendlich kleiner Dimension die in der Zeiteinheit das Volumen s einer als inkompressibel gedachten Flüssigkeit liefert. Die Masse der von der Quelle gelieferten Flüssigkeit mit der Dichte ϱ ist ϱs. Sind n solcher Quellen in der Volumeneinheit vorhanden, so liefert uns eine solche Volumeneinheit die Masse $m = \varrho s n$. Man bezeichnet m als die Ergiebigkeit der Quelle, und aus dem über $\varrho \operatorname{div} \mathfrak{v}$ Gesagten ist es klar, daß

$$m = \varrho s n = \varrho \operatorname{div} \mathfrak{v} \quad \text{sein wird.} \tag{c}$$

Um eine Anwendung des Begriffes der Ergiebigkeit zu geben, wenden wir uns zu dem Ausdruck (111) I, ersetzen dort $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{v}$ und nehmen an, die Flüssigkeit erfulle den ganzen Raum, ruhe im Unendlichen und habe eine wirbelfreie Bewegung. Dann ist

$$\mathfrak{v} = -\frac{\nabla}{4\pi} \int_{\infty} \frac{\operatorname{div} \mathfrak{v}}{r} \, dv. \tag{d}$$

Ferner nehmen wir an, nur in einem unendlich kleinen Volumen v seien Quellen vorhanden mit der Ergiebigkeit

$$m = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathfrak{v}, \tag{e}$$

d. h die Dichte der Flüssigkeit ist gleich $\frac{1}{4\pi}$ angenommen.

Da überall, außer in dem sehr kleinen Quellengebiet, $\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$ ist, so folgt aus (d) unter Berücksichtigung der Tatsache, daß der Operator ∇ sich auf den Punkt bezieht, für den wir $\mathfrak{v}$ berechnen wollen (d. h. es kommt hierbei eine Verschiebung des Aufpunktes in Betracht), wegen (110) I

$$\mathfrak{v} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\infty} \operatorname{div} \mathfrak{v} \, \nabla' \frac{1}{r} \, dv = -mv \frac{\mathfrak{r}_0}{r^2}.$$

Oder wenn wir den Aufpunkt in das Quellengebiet legen, also von hier aus $\mathfrak{r}_0$ rechnen und den Endpunkt von $\mathfrak{r} = r\mathfrak{r}_0$ als den Punkt betrachten, für den wir $\mathfrak{v}$ berechnen wollen,

$$\mathfrak{v} = mv \frac{\mathfrak{r}_0}{r^2} = -mv \nabla \frac{1}{r}. \tag{f}$$

Bestimmen wir hieraus $\operatorname{div} \mathfrak{v}$, so wird es gleich Null sein, solange der Endpunkt von $\mathfrak{r}$ außerhalb des Quellengebietes liegt. Liegt er innerhalb dieses Gebietes, so folgt aus (107a) I

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = -mv \operatorname{div} \nabla \frac{1}{r} = 4\pi m, \tag{g}$$

was mit (e) übereinstimmt.

Ist F eine Fläche, die das Quellengebiet einschließt, so wird die Masse M der Flüssigkeit, die aus dieser Fläche in der Zeiteinheit ausströmt, gleich sein

$$M = \frac{1}{4\pi} \int_F \mathfrak{v} \, d\mathfrak{f}, \tag{h}$$

da die Dichte gleich $\frac{1}{4\pi}$ ist. Augenscheinlich muß aber $M = mv$ sein. Man überzeugt sich leicht hiervon, indem man (f) in (h) einsetzt und dabei berücksichtigt, daß $\nabla \frac{1}{r} \, d\mathfrak{f} = -do$ ist, wo do den räumlichen Winkel bedeutet, unter dem man vom Aufpunkt aus ein Flächenelement $d\mathfrak{f}$ sieht.

26. Die Wirbelsätze. Wir nehmen wieder an, die Kraft $\mathfrak{G}$ sei eine konservative, nämlich

(a) $$\mathfrak{G} = -\nabla\omega.$$

Teilen wir (19a) durch ϱ und nehmen beiderseits den rot, so erhalten wir mit (a)

(b) $$\begin{cases} 2\dfrac{\partial\mathfrak{w}}{\partial t} = -[(\nabla s)\nabla p] + \frac{1}{3}[(\nabla\nu)\nabla \operatorname{div}\mathfrak{v}] + \nu \operatorname{rot}\nabla^2\mathfrak{v} + \\ \qquad + [(\nabla\nu)\nabla^2\mathfrak{v}] + 2\operatorname{rot}[\mathfrak{v}\mathfrak{w}], \end{cases}$$

(c) wo $$s = \frac{1}{\varrho}$$

das spezifische Volumen und

(d) $$\nu = \frac{\mu}{\varrho}$$

den kinematischen Reibungskoeffizienten bedeutet

Beachten wir, daß wegen (3)

$$\frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial t} + \mathfrak{v}\nabla\cdot\mathfrak{w} = \frac{d\mathfrak{w}}{dt}$$

ist, so können wir statt (b) infolge (79a) I und (63) I schreiben

(28) $$\begin{cases} \dfrac{d\mathfrak{w}}{dt} = -\frac{1}{2}[(\nabla s)\nabla p] + \frac{2}{3}[(\nabla\nu)\nabla \operatorname{div}\mathfrak{v}] - [(\nabla\nu)\operatorname{rot}\mathfrak{w}] + \\ \qquad + \mathfrak{w}\nabla\cdot\mathfrak{v} + \nu\nabla^2\mathfrak{w} - \mathfrak{w}\operatorname{div}\mathfrak{v}, \end{cases}$$

(e) da $\operatorname{rot}\nabla^2\mathfrak{v} = -\operatorname{rot}(\operatorname{rot}^2\mathfrak{v}) = -2\operatorname{rot}^2\mathfrak{w} = 2\nabla^2\mathfrak{w}$ ist.

Die linke Seite von (28) bedeutet die substantielle Änderung des Wirbels, d. h die Änderung des einem bestimmten Flussigkeitsteilchen zukommenden Wirbels

Wir wollen jetzt die substantielle Änderung der Zirkulation in der Kurve L bestimmen. Aus (5) erhalten wir

$$\frac{d}{dt}\int_L \mathfrak{v}\,d\mathfrak{r} = \int_L \left\{\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t} + 2[\mathfrak{w}\mathfrak{v}]\right\} d\mathfrak{r}$$

oder wegen (a), (19a) und (89) I, wenn ν und ϱ unabhangig vom Ort sind,

(29) $$\frac{d}{dt}\int_L \mathfrak{v}\,d\mathfrak{r} = \int_L \nu\nabla^2\mathfrak{v}\,d\mathfrak{r}.$$

Ist die Flüssigkeit reibungslos, also $\mu = \nu = 0$, und das spezifische Volumen eine Funktion nur des Druckes p, so ist

$$\nabla s = \frac{ds}{dp} \nabla p, \tag{30}$$ und es folgt aus (28)

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dt} = \mathfrak{w} \nabla \quad \mathfrak{v} - \mathfrak{w} \operatorname{div} \mathfrak{v} \tag{f}$$ und aus (29)

$$\frac{d}{dt} \int_L \mathfrak{v}\, d\mathfrak{r} = 0. \tag{g}$$

Ist in einem Augenblick $\mathfrak{w} = 0$, so folgt aus (f), daß für das betreffende Flüssigkeitsteilchen der Wirbel auch immer gleich Null bleiben wird. Ist aber $\mathfrak{w}$ von Null verschieden, so ersehen wir, daß in dem betreffenden Flüssigkeitsteilchen der Wirbel erhalten bleibt. Es kann sich $\mathfrak{w}$ wegen (f) wohl ändern, aber niemals gänzlich verschwinden.

Wir haben in Nr. 25 gesehen, daß die Wirbellinien nie aus einer Wirbelröhre heraustreten konnen Bedeutet demnach L eine Kurve, die auf der Mantelfläche der Röhre liegt, ohne die Röhre zu umschlingen, so folgt aus (g), daß die Wirbellinien immer aus denselben Teilchen bestehen und sich mit der Flüssigkeit bewegen. Dasselbe gilt fur einen Wirbelfaden oder eine Wirbelröhre, denn deren Mantelflächen bestehen aus Wirbellinien.

Ist die Flüssigkeit außerdem inkompressibel, so stellen diese Erörterungen die bekannten Wirbelsätze von Helmholtz dar.

Um (f) zu deuten, betrachten wir einen Wirbelfaden und nehmen an, L umschlinge ihn. Dann ist

$$\int_L \mathfrak{v}\, d\mathfrak{r} = 2\, \mathfrak{w}\, d\mathfrak{f} \tag{h}$$

und konstant längs dem Faden und wegen (g) unabhängig von der Zeit.

Die positive Richtung längs des Fadens falle mit $\mathfrak{w}$ zusammen. Vergrößert sich $\mathfrak{v}$ in dieser Richtung, so ist das erste Glied rechter Hand von (f) positiv. Es nimmt deshalb der Wirbel zu, wenn wir vorläufig vom zweiten Glied der rechten Seite von (f) absehen. Das ist erklärlich, wenn man bedenkt, daß eine Vergrößerung von $\mathfrak{v}$ längs $\mathfrak{w}$ nichts anderes bedeutet, als daß das betrachtete Stück des Wirbelfadens gedehnt wird. Da aber dieser stets aus denselben Teilchen besteht, muß sich hierbei der Querschnitt verkleinern und infolgedessen auch das Trägheitsmoment um die Achse des Wirbelfadens,

weshalb die Drehgeschwindigkeit zunehmen muß. Das ist im Einklang mit (h) In demselben Sinne wirkt auch eine Kompression, da div $\mathfrak{v}$ hierbei negativ ist, wie aus (f) folgt, wodurch auch das zweite Glied in (f) gedeutet ist.

Ist Reibung vorhanden, oder die Beziehung (30) nicht erfullt, oder endlich $\mathfrak{G}$ keine konservative Kraft, so kann ein Verschwinden oder eine Neubildung von Wirbeln stattfinden.

Wir nehmen z B an, die Flüssigkeit sei inkompressibel und homogen, aber mit Reibung behaftet. Dann ist

$$\text{(i)} \qquad \begin{cases} \mu > 0; & \nabla s = 0; \qquad \operatorname{div} \mathfrak{v} = 0; \\ \varrho = \text{konst.}; & \nabla \nu = \mu \nabla s = 0, \end{cases}$$

da wie immer μ als konstant angenommen ist; und es folgt deshalb aus (28)

$$\text{(31)} \qquad \frac{d\mathfrak{w}}{dt} = \mathfrak{w}\nabla \cdot \mathfrak{v} + \nu \nabla^2 \mathfrak{w}$$

Um ein Beispiel fur die Bildung von Wirbeln zu geben, denken wir uns ein starres Gefäß, vollkommen mit einer Flüssigkeit gefüllt, die den Bedingungen (i) genügt

Zur Zeit t sei alles in Ruhe, also $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ überall gleich Null. Wir bewegen jetzt das Gefäß. Infolge der Reibung erhält die Flüssigkeit eine gewisse Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$. Von einem Zeitpunkt t_1 an halten wir das Gefäß fest. Die Flüssigkeit wird sich infolge der Trägheit weiter bewegen und die kinetische Energie wegen der Reibung zerstreut werden.

Wir betrachten jetzt die Bewegung der Flüssigkeit vom Moment t_1 an Wie man experimentell nachweisen kann, findet an der inneren Fläche des Gefäßes kein Gleiten der Flüssigkeit statt. Nehmen wir dies an, so erhalten wir aus (111) I wegen (i)

$$\text{(k)} \qquad \mathfrak{v} = \frac{\operatorname{rot}}{2\pi} \int\limits_V \frac{\mathfrak{w}}{r}\, dv,$$

und da $\mathfrak{v}$ nicht Null ist, so ist hierdurch die Bildung von Wirbeln bewiesen.

Die kinetische Energie wird nach der Beziehung (26a) zerstreut, d. h.

$$\text{(32)} \qquad \frac{dL}{dt} = -4\mu \int\limits_V \mathfrak{w}^2 dv.$$

27. Strömung um einen Wirbelring. Wir nehmen an, die Flussigkeit genüge den Bedingungen (i) Nr. 26, erfülle den ganzen

Raum und ruhe im Unendlichen. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ soll überall endlich und stetig sein.

Dann erhalten wir aus (111) I und (113) I

(a) $$\mathfrak{v} = \operatorname{rot} \mathfrak{D},$$

(b) wo $$\mathfrak{D} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_V \frac{\mathfrak{w}}{r}\, dv$$

das Vektorpotential bedeutet und V den von den Wirbeln eingenommenen Raum.

Außerhalb V muß $\mathfrak{v}$ durch ein Potential φ darstellbar sein, d. h.

(c) $$\mathfrak{v} = \nabla \varphi \quad \text{außerhalb } V.$$

Das Wirbelgebiet bestehe aus einem Wirbelring mit unendlich kleinem Querschnitt, also aus einem geschlossenen Wirbelfaden.

Bezeichnet $\varkappa$ die Zirkulation um den Faden, so ist wegen (h) Nr. 26

$$\frac{\varkappa}{2} = \mathfrak{w}\, d\mathfrak{f}$$

Wegen des unendlich kleinen Querschnitts des Fadens können wir $\mathfrak{w}\, dv$ in (b) ersetzen durch

$$\mathfrak{w}\, dv = \mathfrak{w}\, d\mathfrak{f} \cdot d\mathfrak{r} = \frac{\varkappa}{2}\, d\mathfrak{r},$$

wo $d\mathfrak{r}$ ein Linienelement längs dem Faden mit der positiven Richtung von $\mathfrak{w}$ bedeutet. Deshalb erhalten wir anstatt (b), da $\varkappa =$ konst. längs dem Faden ist,

(d) $$\mathfrak{D} = \frac{\varkappa}{4\pi} \int\limits_L \frac{d\mathfrak{r}}{r},$$

wo L den Wirbelfaden bedeutet. Hieraus und aus (a) folgt auf Grund von (129) I

(e) $$\mathfrak{v} = -\frac{\varkappa}{4\pi} \nabla \int\limits_f \mathfrak{n} \nabla \frac{1}{r}\, df = \frac{\varkappa}{4\pi} \nabla \Omega.$$

Es bedeutet f eine Fläche, deren Randkurve der Wirbelring ist, und Ω den räumlichen Winkel, unter dem man den Ring vom Aufpunkte aus sieht.

Aus (e) ergibt sich, daß sich $\mathfrak{v}$ außerhalb V tatsächlich von einem Potential

(f) $$\varphi = \frac{\varkappa}{4\pi} \Omega$$

ableiten läßt. Das Potential φ ist mehrdeutig; denn bei einem Umlauf um den Ring ändert sich Ω um 4π

Für die Zerstreuung der Energie wird auch hier der Ausdruck (26a) Gültigkeit behalten, und es wird sein

$$\frac{dL}{dt} = -4\mu \int_V \mathfrak{w}^2 \, dv \tag{g}$$

Es bedeutet L, wie auch in Nr 24, die gesamte kinetische Energie der Flüssigkeit.

Wegen der Bedingungen, denen die Flüssigkeit genugt, laßt sich die Energie L nach (150) I, wenn wir dort $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{v}$ ersetzen, durch

$$L = \frac{\varrho}{2} \int_V \mathfrak{v}^2 \, dv = \varrho \int_V \mathfrak{D} \, \mathfrak{w} \, dv \tag{h}$$

ausdrucken oder infolge von (b) durch

$$L = \frac{\varrho}{2\pi} \int_V \int_V \frac{\mathfrak{w}\,\mathfrak{w}'}{r} \, dv \, dv', \tag{i}$$

wo also eine doppelte Integration über den Wirbelring auszuführen ist.

Anderseits läßt sich die Energie L_1 des wirbelfreien Raumes wegen (156) I, (f) und (c) darstellen durch

$$L_1 = \frac{\varrho}{2} \int_{f_1} \varphi \, \mathfrak{v} \, \mathfrak{n} \, df + \frac{\varkappa \varrho}{2} \int_f \mathfrak{v} \, \mathfrak{n} \, df. \tag{k}$$

Hier bedeutet f dasselbe wie in (e) und f_1 die Oberfläche des Wirbelringes Wegen (d) Nr 24 I bedeutet in (156) I und in (k) das $\varkappa$ ebenfalls die Zirkulation um den Ring.

Bezeichnen wir mit Φ das Volumen der Flüssigkeit, das in der Zeiteinheit durch f hindurchströmt, den sogenannten Fluß durch den Wirbelring, so ist

$$\Phi = \int_f \mathfrak{v} \, \mathfrak{n} \, df \tag{l}$$

Da der Wirbelring unendlich dunn und $\mathfrak{v}$ überall endlich angenommen ist, so können wir das erste Integral in (k) vernachlässigen und außerdem $L = L_1$ setzen. Wir erhalten deshalb aus (i), (k) und (l)

$$L = \frac{\varrho}{2\pi} \int_V \int_V \frac{\mathfrak{w}\,\mathfrak{w}'}{r} \, dv \, dv' = \frac{\varrho \varkappa}{2} \Phi. \tag{33}$$

28. Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit im Innenraume eines Ringes. Die Flüssigkeit genüge wieder den Bedingungen (i) Nr. **26** und sei durch irgendwelche Mittel in Bewegung gebracht, der Ring selbst aber festgehalten, ähnlich wie in Nr. **26**.

Da div $\mathfrak{v}$ verschwindet und ebenfalls die zur inneren Oberfläche F normale Geschwindigkeit, so ergibt (111) I für diesen Fall

$$\text{(a)} \qquad \mathfrak{v} = \frac{\text{rot}}{2\pi} \int\limits_V \frac{\mathfrak{w}}{r}\, dv + \frac{\text{rot}}{4\pi} \int\limits_F \frac{[\mathfrak{v}\,\mathfrak{n}]}{r}\, df.$$

Findet kein Gleiten längs F statt, so gelangen wir zu dem bekannten Ergebnis

$$\text{(b)} \qquad \mathfrak{v} = \frac{\text{rot}}{2\pi} \int\limits_V \frac{\mathfrak{w}}{r}\, dv,$$

wonach Wirbel vorhanden sein müssen, wenn $\mathfrak{v}$ von Null verschieden sein soll.

Ist die Flüssigkeit reibungslos, so kann sie sich wirbelfrei bewegen, indem sie längs F gleitet. Es ist dann

$$\text{(c)} \qquad \mathfrak{v} = \frac{\text{rot}}{4\pi} \int\limits_F \frac{[\mathfrak{v}\,\mathfrak{n}]}{r}\, df$$

Da hier $\mathfrak{w} = 0$ angenommen ist, also $\mathfrak{v} = \nabla\varphi$ ist, der Raum aber innerhalb des Ringes ein zweifach zusammenhängender ist, so können wir infolge von (144) I statt (c) auch schreiben

$$\text{(d)} \qquad \mathfrak{v} = -\nabla \int\limits_F \varphi\, \mathfrak{n} \nabla \frac{1}{r}\, df + \varkappa\, \text{rot} \int\limits_L \frac{d\mathfrak{r}}{r},$$

wo $\varkappa$ wieder die Zirkulation innerhalb des Ringes an ihm entlang und L die Schnittkurve einer Fläche mit dem Ring (siehe Fig 20, Nr. **24** I) bedeuten.

29. Stationäre Strömung in einem Zylinder von kreisförmigem Querschnitt. Diesen Fall wollen wir unter den Voraussetzungen untersuchen, daß die Flüssigkeit den Bedingungen (i) Nr. **26** genügt und daß die Geschwindigkeit parallel der Achse des Zylinders ist und nur von dem Betrage r des Abstandes

$$\text{(a)} \qquad \mathfrak{r} = r\,\mathfrak{r}_0$$

von dieser Achse abhängt Hier bedeutet $\mathfrak{r}_0$ den Einheitsvektor längs $\mathfrak{r}$, von der Achse aus gerechnet Außerdem soll sein

(b) $$\mathfrak{G} = -\nabla \omega$$

(c) Wir haben deshalb $$\mathfrak{v} = v\,\mathfrak{k},$$

wenn wir die z-Achse mit der Achse des Zylinders zusammenfallen lassen. v ist eine Funktion nur von r. Aus (c) folgt

$$\text{rot}\,\mathfrak{v} = -[\mathfrak{k}\nabla v]$$

(d) oder $$\mathfrak{w} = \frac{1}{2}\frac{dv}{dr}[\mathfrak{r}_0\mathfrak{k}]$$

und $$\text{rot}\,\mathfrak{w} = \frac{1}{2}\frac{dv}{dr}\,\text{rot}\,[\mathfrak{r}_0\mathfrak{k}] + \frac{1}{2}\left[\nabla\frac{dv}{dr}[\mathfrak{r}_0\mathfrak{k}]\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{dv}{dr}\,\text{rot}\,[\mathfrak{r}_0\mathfrak{k}] - \frac{\mathfrak{k}}{2}\frac{d^2v}{dr^2}$$

Es ist aber

$$\text{rot}\,[\mathfrak{r}_0\mathfrak{k}] = \text{rot}\,\frac{1}{r}[\mathfrak{r}\mathfrak{k}] = \frac{1}{r}\,\text{rot}\,[\mathfrak{r}\mathfrak{k}] + [\nabla\frac{1}{r}[\mathfrak{r}\mathfrak{k}]] = \frac{1}{r}\,\text{rot}\,[\mathfrak{r}\mathfrak{k}] + \frac{\mathfrak{k}}{r}$$

oder wegen (h) Nr. 20 $\quad \text{rot}\,[\mathfrak{r}_0\mathfrak{k}] = -\frac{\mathfrak{k}}{r}.$

(e) Deshalb ist $$\text{rot}\,\mathfrak{w} = -\frac{\mathfrak{k}}{2}\left\{\frac{1}{r}\frac{dv}{dr} + \frac{d^2v}{dr^2}\right\}.$$

Für stationäre Strömung ist $\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t} = 0$, und da $\text{div}\,\mathfrak{v} = 0$ ist,

(f) $$\nabla^2\mathfrak{v} = -\,\text{rot}\,\text{rot}\,\mathfrak{v} = -\,2\,\text{rot}\,\mathfrak{w}.$$

Deshalb ergibt (19a)

(g) $$\varrho\frac{\nabla\cdot\mathfrak{v}^2}{2} - 2\varrho\,[\mathfrak{v}\mathfrak{w}] = -\nabla(\varrho\omega + p) - 2\mu\,\text{rot}\,\mathfrak{w}$$

Multiplizieren wir dies skalar mit $\mathfrak{r}_0$, so folgt wegen (d) und (e), und da wegen der Bedingung (i) Nr. 26 ϱ als konstant angenommen ist

(h) $$\mathfrak{r}_0\nabla\left(\varrho\omega + p + \frac{\varrho\mathfrak{v}^2}{2}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\varrho\omega + p + \frac{\varrho\mathfrak{v}^2}{2}\right) = 0$$

Wir bezeichnen mit $d\mathfrak{r}$ ein Linienelement einer zur Achse parallelen Geraden, von der Länge l. Es ist dann

(i) $$d\mathfrak{r} = \mathfrak{k}\,dl.$$

Beachten wir, daß sich $\mathfrak{v}$ längs $\mathfrak{k}$ nicht ändert und mit $\mathfrak{k}$ gleichgerichtet ist, so ergibt eine skalare Multiplikation von (g) mit $\mathfrak{k}$

$$\mathfrak{k}\nabla(\varrho\omega + p) = -2\mu\mathfrak{k}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{w}.$$

Multiplizieren wir diesen Ausdruck mit dl, integrieren längs der Geraden l und beachten, daß $\mathfrak{k}$ rot $\mathfrak{w}$ hierbei konstant ist, so folgt

$$\text{(k)} \qquad a = \frac{\mathfrak{k}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{w}}{2},$$

$$\text{(l)} \quad \text{wo} \qquad a = \frac{p_1 - p_2 + \varrho(\omega_1 - \omega_2)}{4\mu l}.$$

Aus (h) ergibt sich, daß a eine Konstante ist und $\mathfrak{v}$ sich längs l nicht ändert. Integrieren wir (k) mit Hilfe von (e) unter der Annahme, daß an der Oberflache des Zylinders kein Gleiten stattfindet und daß $\mathfrak{v}$ überall endlich ist, so erhalten wir

$$\text{(m)} \qquad \mathfrak{v} = a(R^2 - r^2)\,\mathfrak{k},$$

wo R den Radius des Zylinders bedeutet.

Diese Gleichung entspricht dem von Poiseuille durch Messungen gefundenen Gesetz der Strömung von Wasser durch Kapillarrohren.

Aus (m) und (d) folgt

$$\text{(n)} \qquad \mathfrak{w} = a\,[\mathfrak{k}\mathfrak{r}].$$

Wir wollen jetzt auf unseren Fall die Gleichung (27a) anwenden. Wir nehmen als Volumen V das an, das zwischen zwei zur Achse senkrechten Querschnitten enthalten ist, deren gegenseitige Entfernung l ist. Beachten wir, daß auf der Mantelflache dieses Zylinders $\mathfrak{v} = 0$ ist und auf den Endflächen $\mathfrak{v}$ mit $\mathfrak{n}$ gleich oder entgegengesetzt gerichtet ist, so folgt aus (27a) und (c) Nr. 24 wegen (h), (l) und (f)

$$\text{(o)} \qquad 4\mu a l \int_f v\,df = 4\mu \int_V \mathfrak{w}^2\,dv,$$

wo f die Fläche eines Querschnittes darstellt

Setzen wir in (o) die Werte von v und $\mathfrak{w}$ aus (m) und (n) ein, so wird ersichtlich, daß hierdurch dieser Gleichung genügt wird, und zwar erhalten wir

$$\text{(p)} \qquad 4\mu a l \int_f v\,df = 2a^2\mu\pi R^4 l.$$

Aus (n) ergibt sich, daß die Flüssigkeit aus Wirbelfäden besteht, die der Form nach Kreisringe sind mit den Mittelpunkten auf der Achse und mit einer positiven Umlaufsrichtung im Sinne der Drehung des Uhrzeigers, wenn man längs $\mathfrak{k}$ blickt. Die Flussigkeit wirbelt um diese positive Umlaufsrichtung im Sinne des Uhrzeigers.

Wir wollen jetzt die Verzerrungsgeschwindigkeiten, die Spannungen usw. bestimmen. Dazu denken wir uns ein Achsenkreuz $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ mit dem Anfangspunkt im Endpunkt von $\mathfrak{r}$ und verstehen von jetzt an unter $\mathfrak{r}_0$ einen Einheitsvektor vom Anfangspunkt dieses Achsenkreuzes aus. $\mathfrak{k}$ soll mit dem früheren $\mathfrak{k}$ gleichgerichtet sein und $\mathfrak{j}$ die Richtung von $\mathfrak{r}$ haben Es ist dann

(q) $$\mathfrak{w} = ar\,[\mathfrak{k}\mathfrak{j}] = -ar\mathfrak{i},$$

und aus (2) folgt

$$\mathfrak{C}' = \mathfrak{r}_0\nabla\cdot\mathfrak{v} - ar\,[\mathfrak{r}_0\mathfrak{i}] = -a\mathfrak{r}_0\nabla\cdot r^2\mathfrak{k} - ar\,[\mathfrak{r}_0\mathfrak{i}]$$

Lassen wir $\mathfrak{r}_0$ nacheinander mit $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ zusammenfallen, so erhalten wir

$$\mathfrak{C}_x' = 0;\quad \mathfrak{C}_y' = -ar\mathfrak{k};\quad \mathfrak{C}_z' = -ar\mathfrak{j},$$

(r) woraus $$\mathfrak{C}' = -\mathfrak{j}\mathfrak{r}_0\cdot\mathfrak{k}ar - \mathfrak{k}\mathfrak{r}_0\,\mathfrak{j}ar.$$

Damit übereinstimmend folgt aus (m)

$$\nabla\cdot\mathfrak{v} = -2a\mathfrak{r}\,\mathfrak{k},$$

daher $$\mathrm{T} = \operatorname{def}\mathfrak{v} = -a(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{k} + \mathfrak{k}\cdot\mathfrak{r}).$$

Führen wir jetzt ein neues Achsenkreuz $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$, $\mathfrak{k}'$ mit demselben Anfangspunkt ein, wobei $\mathfrak{i}' = \mathfrak{i}$ sein soll und $\mathfrak{k}'$ den Winkel zwischen $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ halbiert, so folgt aus (r) ahnlich wie in Nr 20

(s) $$\mathfrak{C}' = \mathfrak{j}'\mathfrak{r}_0\cdot\mathfrak{j}'ar - \mathfrak{k}'\mathfrak{r}_0\cdot\mathfrak{k}'ar,$$

woraus sich die Verzerrungsgeschwindigkeiten ergeben zu

(t) $$\lambda_1' = 0;\quad \lambda_2' = ar;\quad \lambda_3' = -ar,$$

was mit der Annahme $\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0$ übereinstimmt.

Aus (16), (r) und (s) fließt

(u) $$\mathfrak{P} = -\mathfrak{n}p - \mathfrak{j}\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{k}2\mu ar - \mathfrak{k}\mathfrak{n}\,\mathfrak{j}2\mu ar$$

(v) und $$\mathfrak{P} = -\mathfrak{n}p + \mathfrak{j}'\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{j}'2\mu ar - \mathfrak{k}'\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{k}'2\mu ar$$

In Übereinstimmung damit folgt aus (14a), da $\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0$ ist,

$$\Phi = -p - 2\mu a(\mathfrak{r}\,\mathfrak{k} + \mathfrak{k}\,\mathfrak{r})$$

Die Dehnungsachsen sind durch $\mathfrak{i}'$, $\mathfrak{j}'$ und $\mathfrak{k}'$ gegeben. Die Spannungen bestimmen sich, abgesehen von dem gleichmäßigen Druck p, ähnlich wie die Spannungen (t) und (u) Nr. 20 durch Fig. 9, wo man sich die $\mathfrak{i}' = \mathfrak{i}$-Achse senkrecht zur Figur und vom Beschauer weg und $\mathfrak{k}$ in der Ebene der Figur um 90^0 gedreht denken muß.

Aus (23) und (t) ergibt sich

$$W = 4\mu a^2 r^2. \tag{w}$$

Hieraus erhalten wir

$$\int_V W dv = 2 a^2 \mu \pi R^4 l, \tag{x}$$

wo V dasselbe Volumen bedeutet wie in (o). Durch (x), (u) und (p) wird auch die Gleichung (27) befriedigt Die Gleichung (x) zeigt uns die Zerstreuung der Energie an (wegen (26)), d. h. sie gibt an, wieviel Wärme auf der Länge l des Rohres in der Zeiteinheit durch Reibung entwickelt wird.

Zweiter Abschnitt

Elektrizitätslehre.

V. Elektrostatik.

30. Allgemeine Sätze. Ist $\mathfrak{E}$ die elektrische Feldstarke, so haben wir im elektrostatischen Feld überall

$$\text{rot}\,\mathfrak{E} = 0, \tag{1}$$

woraus sich nach Nr 25 I ergibt, daß auf den Unstetigkeitsflächen die tangentialen Komponenten von $\mathfrak{E}$ stetig sind Hiernach und nach den Ausführungen in Nr. 25 I folgt aus (111) I, wenn wir die Volumenintegration uber den ganzen Raum erstrecken,

$$\mathfrak{E} = -\nabla p \tag{2}$$

$$\text{mit} \qquad p = \int\limits_{\infty} \frac{\varrho'}{r}\, dv + \int\limits_{F_1} \frac{\eta'}{r}\, df. \tag{3}$$

Dabei ist im absoluten elektrostatischen Maßsystem

$$\varrho' = \frac{\text{div}\,\mathfrak{E}}{4\pi}, \qquad \eta' = \frac{\mathfrak{n}\,(\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1)}{4\pi}. \tag{4}$$

Als positive Richtung von $\mathfrak{n}$ in (4) gilt die vom Medium 1 zum Medium 2 ($\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_{12}$)

Es bezieht sich in (3) F_1 auf die Unstetigkeitsflachen zwischen zwei Dielektriken oder zwischen einem Leiter und einem Dielektrikum. Das zugehörige Oberflächenintegral uber eine unendlich weit entfernte Oberfläche F verschwindet, denn wir nehmen an, daß alle Unstetigkeitsflächen im Endlichen liegen und ebenfalls nur dort ϱ' und η' von Null verschieden sind. Deshalb wird im Unendlichen p unendlich klein wie $\frac{1}{r}$ und $\frac{\mathfrak{E}}{r}$ wegen (2) klein wie $\frac{1}{r^3}$, woraus das Verschwinden jenes Oberflächenintegrals ersichtlich wird.

Die Großen ϱ' und η' nennt man die **räumliche** und die **Flächendichte der freien** Elektrizität.[1])

Der Potentialsprung $p_2 - p_1$ an einer Unstetigkeitsfläche ist wegen (1) konstant; man darf ihn $= 0$, das Potential p selbst also als stetig annehmen.

Ist das Medium 2 ein Leiter, so haben wir bei Gleichgewicht erfahrungsgemäß

$$(5) \qquad \mathfrak{E}_2 = 0, \qquad \text{woraus} \qquad \eta' = -\frac{\mathfrak{E}_1 \mathfrak{n}}{4\pi}$$

Hieraus und aus (2) ergibt sich, daß die Oberfläche eines Leiters eine Fläche konstanten Potentials p ist (Niveaufläche).

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{D}$ die **dielektrische Verschiebung**, so ist im absoluten elektrostatischen Maß

$$(6) \qquad \mathfrak{D} = \frac{\varepsilon \mathfrak{E}}{4\pi},$$

wo ε die Dielektrizitätskonstante bedeutet. Die räumliche und die Flächendichte der **wahren** Elektrizität sind

$$(7) \qquad \varrho = \operatorname{div} \mathfrak{D}, \qquad \eta = \mathfrak{n}(\mathfrak{D}_2 - \mathfrak{D}_1).$$

Auf der Oberfläche eines Leiters 2 ist

$$(8) \qquad \eta = -\frac{\mathfrak{n}\, \varepsilon_1 \mathfrak{E}_1}{4\pi} = -\mathfrak{n}\mathfrak{D}_1.$$

Wegen des **Gauß**schen Satzes und Nr 25 I erhalten wir

$$(9) \qquad \int\limits_F \mathfrak{D}\, d\mathfrak{f} = \int\limits_V \varrho\, dv + \int\limits_{F_1} \eta\, df,$$

d h. die innerhalb F enthaltene wahre Elektrizität ist gleich dem dielektrischen Verschiebungsfluß durch die Fläche F.

Ist die Dichte der wahren Elektrizität an der Grenze zweier Dielektrika gleich Null, so folgt aus (7), daß in diesem Fall die normalen Komponenten der dielektrischen Verschiebung an dieser Unstetigkeitsfläche stetig sind. Es ist also in diesem Fall

$$(a) \qquad \eta = 0 = \mathfrak{n}(\mathfrak{D}_2 - \mathfrak{D}_1) = \frac{\mathfrak{n}(\varepsilon_2 \mathfrak{E}_2 - \varepsilon_1 \mathfrak{E}_1)}{4\pi}.$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{n}\mathfrak{E}_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\mathfrak{n}\mathfrak{E}_1$$

und aus (4)

$$(10) \qquad \eta' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{4\pi\varepsilon_2} \cdot \mathfrak{n}\mathfrak{E}_1$$

---

1) Näheres siehe in Bd 3 dieser Sammlung

31. Die Spannungen im elektrostatischen Feld. Die mechanische Kraft $\mathfrak{K}$ in einem elektrostatischen Feld, auf die Volumeneinheit berechnet, ist[1])

$$(11) \qquad \mathfrak{K} = \varrho \mathfrak{E} - \frac{1}{8\pi} \mathfrak{E}^2 \nabla \varepsilon .$$

Wir wenden uns jetzt zu dem Ausdruck (151) I und ersetzen $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{E}$, ϱ durch ε. Dann ergibt dieser Ausdruck wegen (11), (1) und (7)

$$(12) \qquad \int\limits_V \mathfrak{K}\, dv = \int\limits_F \mathfrak{P}\, df ,$$

$$(13) \quad \text{wo} \quad \mathfrak{P} = \frac{\varepsilon \mathfrak{E}}{4\pi} \cdot \mathfrak{E}\mathfrak{n} - \frac{\varepsilon \mathfrak{E}^2}{8\pi} \cdot \mathfrak{n} = \frac{\varepsilon}{8\pi} (2\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{E} - \mathfrak{E}^2)\, \mathfrak{n} .$$

Wir ersehen hieraus, daß wir die Volumenkräfte durch Spannungen $\mathfrak{P}$ an der Oberfläche ausdrücken können Der Spannungstensor ist

$$\Pi = \frac{\varepsilon}{8\pi} (2\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{E} - \mathfrak{E}^2) ,$$

und $\mathfrak{P}$ hat bei jedem $\mathfrak{n}$ den Betrag $\frac{\varepsilon}{8\pi}\mathfrak{E}^2$. Vergrößern wir V, wobei sich F erweitern wird, und stoßen wir hierbei auf Unstetigkeitsflächen F_1 von ε, so konnen wir diese leicht in Betracht ziehen auf Grund von Nr. 25 I. Wir erhalten dann

$$(14) \qquad \int\limits_V \mathfrak{K}\, dv + \int\limits_{F_1} \mathfrak{P}_1\, df = \int\limits_F \mathfrak{P}\, df ,$$

wo nach (6) und (13)

$$(15) \qquad \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{n}\mathfrak{D}_2 \cdot \mathfrak{E}_2 - \mathfrak{n}\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{E}_1 + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{D}_1\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{D}_2\mathfrak{E}_2) \cdot \mathfrak{n}$$

ist und die Kraft auf die Flacheneinheit dieser Unstetigkeitsfläche bedeutet Auch hier ist die positive Normale vom ersten nach dem zweiten Medium gerichtet. Nun ist identisch

$$(a) \qquad 2(\mathfrak{n}\mathfrak{D}_2 \cdot \mathfrak{E}_2 - \mathfrak{n}\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{E}_1) = \mathfrak{n}(\mathfrak{D}_2 - \mathfrak{D}_1) \cdot (\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2) + \\ + \mathfrak{n}(\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2) \cdot (\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1)$$

$$(b) \quad \text{und} \quad \mathfrak{D}_1\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{D}_2\mathfrak{E}_2 = (\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2)(\mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E}_2) + \mathfrak{D}_1\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{D}_2\mathfrak{E}_1 ,$$

daher nach (15) und (6)

$$(c) \quad 2\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{n}(\mathfrak{D}_2 - \mathfrak{D}_1) \cdot (\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2) + [[\mathfrak{n}(\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1)](\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2)] + \\ + \mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{4\pi} \cdot \mathfrak{n} ,$$

---

1) Vergleiche z. B die Kraft im magnetostatischen Feld. Bd. 1 dieser Sammlung S. 76. Wir kommen noch in Nr. 40 darauf zurück.

oder wenn wir

(d) $$\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 = 2\overline{\mathfrak{E}}, \qquad \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 = 2\overline{\mathfrak{D}}$$

setzen, nach (7)

(16) $$\mathfrak{P}_1 = \eta\overline{\mathfrak{E}} + [[\mathfrak{n}(\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1)]\overline{\mathfrak{D}}] - \frac{1}{2}\,\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2 \cdot \mathfrak{n}\,\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{4\pi}.$$

Es ist aber der Flächenrotor $[\mathfrak{n}(\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1)]$ der Feldstärke $\mathfrak{E}$ immer Null, so daß sich (16) vereinfacht zu

(16a) $$\mathfrak{P}_1 = \eta\overline{\mathfrak{E}} - \frac{1}{2}\,\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2 \cdot \mathfrak{n}\,\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{4\pi}.$$

Die durch das erste Glied dargestellte Spannung infolge der Flächenladung η hat die Richtung der mittleren Feldstärke $\overline{\mathfrak{E}}$ Ist die Unstetigkeitsfläche ladungsfrei ($\eta = 0$), so bleibt noch eine Kraft in Richtung des Falles der Dielektrizitätskonstante ε, d h. in Richtung der Flächennormale vom Körper mit größerer zum Korper mit kleinerer Dielektrizitätskonstante. Wenn dagegen $\eta \neq 0$ ist, kann der Winkel zwischen $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ auch stumpf und damit das skalare Produkt $\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2$ negativ werden, so daß sich die Richtung des zweiten Gliedes in (16a) umkehrt.

Die Analogie von (16a) zu (11) ist sofort erkennbar. $\mathfrak{K}$ ist nämlich der Traktor von Π und $\mathfrak{P}_1$ der „Flächentraktor" $\mathfrak{n}\,(\Pi_2 - \Pi_1)$

Fur $\eta = 0$ wird außer der Tangentialkomponente $\mathfrak{E}_t$ noch die Normalkomponente $\mathfrak{D}_n$ stetig, und (16a) laßt sich schreiben:

(16b) $$\mathfrak{P}_1 = \frac{\mathfrak{n}}{2} \cdot \left\{\left(\frac{4\pi}{\varepsilon_1} - \frac{4\pi}{\varepsilon_2}\right)\mathfrak{D}_n^2 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{4\pi}\,\mathfrak{E}_t^2\right\}.$$

Für die Oberfläche eines Leiters ist $\mathfrak{E}_2 = 0$, und es verschwindet die tangentiale elektrische Feldstärke, so daß

(e) $$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{E}_1\mathfrak{n}$$

wird. Es ergibt sich dann aus (15)

(17) $$\mathfrak{P}_1 = -\frac{\varepsilon_1\,\mathfrak{E}_1^2}{8\pi} \cdot \mathfrak{n}$$

(17a) oder aus (16a) $\mathfrak{P}_1 = \frac{1}{2}\eta\,\mathfrak{E}_1$.

Nehmen wir wieder an, daß alle Ladungen und Unstetigkeitsflächen im Endlichen liegen, und erweitern (14) auf den ganzen unendlichen Raum, so verschwindet die rechte Seite von (14), und wir erhalten:

(18) $$\int\limits_{\infty}\mathfrak{K}\,dv + \int\limits_{F_1}\mathfrak{P}_1\,df = 0,$$

was dem Reaktionsprinzip (30) Nr. 4 genügt.

Wir kehren zu der Spannung (13) zurück und sehen sofort, daß für zwei beliebige Flächenelemente mit den Normalen $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{n}'$ im selben Punkt

$$\mathfrak{P}\mathfrak{n}' = \mathfrak{P}'\mathfrak{n} \tag{19}$$

sein wird, d. h. aber, daß $\mathfrak{P}$ ein el V. ist. Ferner ergibt sich aus (13), daß wenn $\mathfrak{n}$ parallel $\mathfrak{E}$ ist, dasselbe auch für $\mathfrak{P}$ gilt. Deshalb fällt die eine Achse des Spannungsellipsoids mit der Richtung von $\mathfrak{E}$ zusammen Der entsprechende Hauptwert ist

$$a_1 = \frac{\varepsilon \mathfrak{E}^2}{8\pi} \tag{20}$$

Da die beiden anderen Achsen senkrecht zu $\mathfrak{E}$ sind, so folgt aus (13) für die anderen beiden Hauptwerte

$$a_2 = a_3 = -\frac{\varepsilon \mathfrak{E}^2}{8\pi}. \tag{21}$$

Hieraus ergibt sich ein Zug (20) längs $\mathfrak{E}$ und ein Druck (21) senkrecht dazu. Das entsprechende Ellipsoid entartet in eine Kugel mit dem Radius $\frac{\varepsilon \mathfrak{E}^2}{8\pi}$. Da a_1 ein andres Vorzeichen als $a_2 = a_3$ hat, so stellt die Gleichung (g) in Nr. 41, I hier kein Ellipsoid, sondern ein Drehungshyperboloid dar

$\mathfrak{E}$ halbiert immer den Winkel zwischen $\mathfrak{n}$ und $\mathfrak{P}$, was unter Berücksichtigung des Betrages von $\mathfrak{P}$ leicht aus (13) folgt. Die Vektoren $a_1\mathfrak{n}$ gehen in die Vektoren $\mathfrak{P}$ über, wenn der Raum um die Achse $\mathfrak{E}$ eine Halbdrehung macht

Für die Invariante J (223) I, also für den ersten Skalar von Π erhalten wir

$$J = -\frac{\varepsilon \mathfrak{E}^2}{8\pi}, \tag{22}$$

woraus wir unmittelbar schließen, daß die Gleichung (39) Nr. 15 im allgemeinen nicht erfüllt wird D. h. *in einem elastischen isotropen Körper können keine den elektrostatischen Spannungen entsprechenden elastischen Spannungen auftreten.*

Es ist lehrreich, die Spannung Π mit der Spannung Φ des gedrillten Zylinders in Nr 20 zu vergleichen. Dort entartet das Ellipsoid in eine Kreisscheibe

VI. Maxwell-Hertzsche Elektrodynamik.

Ruhende Körper

32. Einleitende Bemerkungen. Der Träger der elektromagnetischen Erscheinungen, der Äther, wird als beweglich angenommen. Bezeichnen wir seine Geschwindigkeit mit $\mathfrak{v}$, so fällt sie dort, wo sich materielle Körper befinden, mit der Geschwindigkeit dieser Körper zusammen. Eine Relativverschiebung des Äthers und der Materie wird nicht angenommen

Ebenso wie in der Elektrostatik wollen wir uns hier auf isotrope Körper beschränken und erhalten für die Maxwell-Hertzschen Gleichungen in Integralform folgende Ausdrücke

$$(1) \qquad 4\pi \int\limits_f \mathfrak{J}' d\mathfrak{f} = 4\pi \int\limits_f \mathfrak{J} d\mathfrak{f} + \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int\limits_f \varepsilon \mathfrak{E} d\mathfrak{f} = \int\limits_L \mathfrak{H} d\mathfrak{r}$$

$$(2) \quad \text{und} \qquad -\frac{d}{dt} \int\limits_f \mu \mathfrak{H} d\mathfrak{f} = \int\limits_L \mathfrak{E} d\mathfrak{r}$$

Hier hat $\mathfrak{E}$ dieselbe Bedeutung wie früher, $\mathfrak{H}$ ist die magnetische Feldstärke, $\mathfrak{J}$ die Dichte des Leitungsstromes und demnach $\mathfrak{J}'$ die des Gesamtstromes. $c = 3.10^{10}$ cm/sec ist die Lichtgeschwindigkeit im Äther. Alle Größen sind im absoluten elektromagnetischen Maßsystem ausgedrückt. Für den Äther ist die Dielektrizitätskonstante ε und die Permeabilität μ gleich eins. Die Fläche f, deren Randkurve L ist, bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ im Sinne von Nr. **22.**

Die elektromagnetische Energie e pro Volumeneinheit ist

$$(3) \qquad e = \frac{\varepsilon \mathfrak{E}^2}{8\pi c^2} + \frac{\mu \mathfrak{H}^2}{8\pi}.$$

Die Dichte des wahren Magnetismus $\frac{\operatorname{div} \mu \mathfrak{H}}{4\pi}$ setzen wir überall gleich Null, woraus folgt

$$(4) \qquad \operatorname{div} \mu \mathfrak{H} = 0.$$

Im absoluten elektromagnetischen Maßsystem drücken sich die Dichten der Elektrizität und die dielektrische Verschiebung so aus[1]):

---

1) Siehe Tabelle der Maßsysteme auf S 89 in Bd. 3 dieser Sammlung.

$$(5)\qquad \varrho' = \frac{\operatorname{div}\mathfrak{E}}{4\pi c^2}, \qquad \eta' = \frac{(\mathfrak{E}_2 - \mathfrak{E}_1)\mathfrak{n}}{4\pi c^2}$$

$$(6)\qquad \varrho = \operatorname{div}\mathfrak{D}, \qquad \eta = (\mathfrak{D}_2 - \mathfrak{D}_1)\mathfrak{n}$$

(7) und
$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon\mathfrak{E}}{4\pi c^2}.$$

Im folgenden werden wir ε und μ für ein bestimmtes Körperteilchen als unabhängig von der Zeit annehmen.

33. Ruhende Körper. Wir setzen jetzt überall $\mathfrak{v} = 0$ und erhalten dann infolge von (7) Nr. **22**, da die Gleichungen (1) und (2) für beliebige Flächen f gelten, die Maxwell-Hertzschen Gleichungen in Differentialform

$$(8)\qquad 4\pi\mathfrak{J}' = 4\pi\left(\mathfrak{J} + \frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t}\right) = 4\pi\mathfrak{J} + \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathfrak{H}$$

(9) und
$$-\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} = -\mu\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathfrak{E},$$

(10) wo
$$\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$$

die sogenannte magnetische Induktion bedeutet.[1])

Multiplizieren wir (8) skalar mit $\mathfrak{E}dv$ und (9) mit $\mathfrak{H}dv$, subtrahieren (9) von (8) und integrieren über ein Volumen V, so folgt wegen (3) und (65) I

$$(11)\qquad -\frac{dE}{dt} = -\frac{d}{dt}\int\limits_V e\,dv = \int\limits_V \mathfrak{J}\mathfrak{E}\,dv + \int\limits_F \mathfrak{S}\,d\mathfrak{f},$$

(12) wo
$$\mathfrak{S} = \frac{[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]}{4\pi}$$

ist und als Poyntingscher Strahlungsvektor bezeichnet wird Gleichung (11) drückt das Energieprinzip aus und besagt, daß die Abnahme der gesamten in V enthaltenen elektromagnetischen Energie E gleich ist der entwickelten Jouleschen Wärme und der durch F ausgestrahlten Energie.

Bezeichnen wir mit σ die Leitfähigkeit, so ist

$$(13)\qquad \mathfrak{J} = \sigma\mathfrak{E}.$$

Hieraus und aus (8) erhalten wir für homogene Körper (also $\nabla\sigma = \nabla\varepsilon = 0$) wegen (5) und (81) I

$$(14)\qquad \varrho' + \tau\frac{\partial\varrho'}{\partial t} = 0,$$

1) Siehe Bd 1 und 3 dieser Sammlung

(15) wo $$\tau = \frac{\varepsilon}{4\pi\sigma c^2}$$

ist. Ist ϱ_0' die Dichte der freien Elektrizität zur Zeit $t = 0$, so erhalten wir aus (14) mit $e = 2{,}718\ldots$

(16) $$\varrho' = \varrho_0' e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Die Zeit τ, nach der ϱ' auf den $e$ten Teil von ϱ_0' gesunken ist, nennt man Relaxationszeit.

Es ist z. B. für Kupfer $\sigma = 57{,}1 \cdot 10^{-5}$

und $$\tau = \varepsilon \cdot 15{,}5 \cdot 10^{-20} \text{ sec}$$

eine auch bei großem ε unmeßbar kleine Zeit In Metallen verschwindet $\partial \mathfrak{D}/\partial t$ stets neben $\mathfrak{J}$.

Da in homogenen Körpern $\varrho = \varepsilon\varrho'$ ist, so bezieht sich die Relaxationszeit daselbst auch auf die wahre Elektrizität.

34. Grenzbedingungen. Aus (8) und (9) folgt

(17) $$\operatorname{div} \mathfrak{J}' = 0$$

(a) und $$\frac{\partial \operatorname{div} \mu\mathfrak{H}}{\partial t} = 0.$$

Die Gleichung (a) stimmt mit (4) überein

Aus letzterer folgt die Stetigkeit der normalen Komponente der magnetischen Induktion an der Grenzfläche zweier Medien. D h es ist

(18) $$(\mu_2\mathfrak{H}_2 - \mu_1\mathfrak{H}_1)\,\mathfrak{n} = 0.$$

Aus (18) und (9) ergibt sich

$$(\operatorname{rot}\mathfrak{E}_2 - \operatorname{rot}\mathfrak{E}_1)\,\mathfrak{n} = 0.$$

Dies, zusammen mit (86) I, fordert die Stetigkeit der tangentialen Komponente $\mathfrak{E}_t$ von $\mathfrak{E}$. Es ist also

(19) $$\mathfrak{E}_{1t} = \mathfrak{E}_{2t}.$$

Ebenso erhalten wir aus (17) und (8)

(20) $$\mathfrak{H}_{1t} = \mathfrak{H}_{2t}$$

Die Gleichung (17), die die Kontinuität des Gesamtstromes ausdrückt, ergibt für die Grenze zweier Dielektrika wegen (6)

(b) $$\frac{\partial(\varepsilon_2\mathfrak{E}_2 - \varepsilon_1\mathfrak{E}_1)}{c^2\partial t} = 4\pi\frac{\partial\eta}{\partial t} = 0$$

und für die Grenze Leiter-Dielektrikum

(c) $$4\pi\sigma_2 \mathfrak{E}_2 \mathfrak{n} + \frac{\partial(\varepsilon_2 \mathfrak{E}_2 - \varepsilon_1 \mathfrak{E}_1)}{c^2 \partial t} = 0$$

(d) oder $$\mathfrak{J}_2 \mathfrak{n} = -\frac{\partial \eta}{\partial t}.$$

Da die Normale, wie immer, vom ersten in das zweite Medium, also in den Leiter hinein weist, so sagt uns (d), daß der normal zur Leiteroberfläche fließende Leitungsstrom gleich ist der Vermehrung der Flächendichte der wahren Elektrizität

35. Ableitung einiger allgemeinen Beziehungen. Wir nehmen an, daß alle Körper nicht nur isotrop, sondern auch homogen sind. Dann ändern sich σ, ε und μ nur beim Durchgang durch die Grenzflächen.

Unter dieser Annahme erhalten wir aus (8), wenn wir diese Gleichung nach t differentiieren und den Wert von $\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}$ aus (9) einsetzen

(21) $$4\pi\sigma\mu \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} = -\operatorname{rot}^2 \mathfrak{E}.$$

(a) Außerdem ist $$\varrho = \varepsilon \varrho'.$$

Ist die Dichte ϱ gleich Null, so können wir deshalb statt (21) wegen (79 a) I auch schreiben

(22) $$4\pi\sigma\mu \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathfrak{E}$$

Wir wenden uns jetzt zum Ausdruck (140a) I und ersetzen dort $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{E}$. Es folgt dann wegen (21) und (5)

(23)[1] $$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{E} = & -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{4\pi\sigma\mu\mathfrak{E} + \left(\frac{\varepsilon\mu}{c^2} - b^2\right)\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}}{r}_{t+br} dv - c^2 \nabla \int_V \frac{\varrho'}{r}_{t+br} dv + \\ & + \frac{b}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_F \frac{[\mathfrak{r}_0 [\mathfrak{n}\mathfrak{E}]]}{r}_{t+br} df - \frac{1}{4\pi}\int_F \mathfrak{E}\mathfrak{n}_{t+br} \cdot \nabla \frac{1}{r}\, df + \\ & + \frac{1}{4\pi}\int_F \left[\nabla \frac{1}{r} [\mathfrak{n}\mathfrak{E}]_{t+br}\right] df - \frac{b}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_F \frac{\mathfrak{r}_0}{r} \cdot \mathfrak{n}\mathfrak{E}_{t+br}\, df - \frac{1}{4\pi}\int_F \frac{[\mathfrak{n} \operatorname{rot} \mathfrak{E}]}{r}_{t+br} df \end{aligned}\right.$$

Wir erweitern dies Integral auf den ganzen Raum, wobei wir die Unstetigkeitsflächen F_1 nach Nr 25 I berucksichtigen müssen Hier-

---

1) Siehe v. Ignatowsky, Ann d Physik **25**, 113, 1908. Dort ist $\mu = 1$ gesetzt.

bei stoßen wir auf Oberflächenintegrale über die im Unendlichen liegende Fläche F_2. Auf dieser Fläche soll in endlichen Zeiten $\mathfrak{E}$ gleich Null sein Wir nehmen den Aufpunkt im Endlichen liegend an Dann muß auf F_2 in den unter den Integralzeichen stehenden Ausdrücken t durch $t + b\,\infty$ ersetzt werden. Damit also im allgemeinen diese Oberflachenintegrale für endliche Zeiten verschwinden, muß b eine negative Größe sein. Wir setzen deshalb

$$(24) \qquad b^2 = m^2, \quad b = -m$$

und verstehen unter m eine positive Große.

Es verschwinden dann die Integrale auf F_2, und wir erhalten unter Berücksichtigung der Stetigkeitsbedingungen (19) und (20) und wenn wir im letzten Integral in (23) rot $\mathfrak{E}$ durch (9) ersetzen, aus (23) wegen (24) und (5)

$$(25)\left\{\begin{aligned} \mathfrak{E} = &-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\infty}\frac{4\pi\sigma\mu\mathfrak{E} + \left(\frac{\varepsilon\mu}{c^2} - m^2\right)\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}}{r}_{t-mr}\,dv - c^2\nabla\int\limits_{V}\frac{\varrho'}{r}\,dv_{t-mr} + \\ &+ c^2\int\limits_{F_1}\eta'\nabla\frac{1}{r}\,df_{t-mr} - mc^2\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{F_1}\frac{\mathfrak{r}_0}{r}\,\eta'\,df_{t-mr} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{F_1}\frac{(\mu_2-\mu_1)[\mathfrak{n}\mathfrak{H}]}{r}_{t-mr}\,df, \end{aligned}\right.$$

wofür wir auch wegen (c) Nr. **22** I schreiben konnen

$$(26) \qquad \mathfrak{E} = -\frac{\partial\mathfrak{A}}{\partial t} - \nabla\psi,$$

$$(27) \quad \text{wo} \qquad \mathfrak{A} = \int\limits_{\infty}\frac{\mathfrak{c}}{r}\,dv_{t-mr} + \int\limits_{F_1}\frac{\mathfrak{c}'}{r}\,df_{t-mr}$$

$$(28) \qquad \psi = c^2\int\limits_{V}\frac{\varrho'}{r}\,dv_{t-mr} + c^2\int\limits_{F_1}\frac{\eta'}{r}\,df_{t-mr}$$

bedeuten und

$$(29) \qquad \mathfrak{c} = \sigma\mu\mathfrak{E} + \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon\mu}{c^2} - m^2\right)\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t},$$

$$(30) \qquad \mathfrak{c}' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{4\pi}[\mathfrak{n}\mathfrak{H}]$$

ist. Hier bezieht sich V auf das von den freien Ladungen eingenommene Volumen. Diese Ladungen, alle Unstetigkeitsflächen und alle materiellen Körper nehmen wir als im Endlichen liegend an.

Haben wir einen statischen Zustand, so verschwindet das erste Glied rechter Seite in (26), und $\mathfrak{E}$ geht wegen (28) und (5) in (2) über, wie es auch sein muß.

Wir wollen jetzt rot $\mathfrak{A}$ bestimmen. Dazu denken wir uns in $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c}'$ t durch $t - mr$ ersetzt und bezeichnen diese Größen mit $\bar{\mathfrak{c}}$ und $\bar{\mathfrak{c}}'$.

Es ist dann

$$\text{(b)} \qquad \mathfrak{A} = \int_{\infty} \frac{\bar{\mathfrak{c}}}{r}\, dv + \int_{F_1} \frac{\bar{\mathfrak{c}}'}{r}\, df$$

Berücksichtigen wir jetzt (140 a) I und ferner, daß bei der Berechnung von rot $\mathfrak{A}$ der Aufpunkt als beweglich angenommen wird, so erhalten wir

$$\text{(c)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = & \int_{\infty} \left[\bar{\mathfrak{c}} \nabla \frac{1}{r}\right] dv - m \int_{\infty} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \bar{\mathfrak{c}}}{\partial t}\, \mathfrak{r}_0\right] dv + \\ & + \int_{F_1} \left[\bar{\mathfrak{c}}' \nabla \frac{1}{r}\right] df - m \int_{F_1} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \bar{\mathfrak{c}}'}{\partial t}\, \mathfrak{r}_0\right] df \end{aligned} \right.$$

Nach (69) I ist aber

$$\left[\bar{\mathfrak{c}} \nabla \frac{1}{r}\right] = \frac{1}{r} \operatorname{rot} \bar{\mathfrak{c}} - \operatorname{rot} \left(\frac{\bar{\mathfrak{c}}}{r}\right)$$

oder wegen (g) Nr. **22a** I

$$\text{(d)} \qquad \left[\bar{\mathfrak{c}} \nabla \frac{1}{r}\right] = \frac{\operatorname{rot} \mathfrak{c}}{r}_{t - mr} + \frac{m}{r} \left[\frac{\partial \bar{\mathfrak{c}}}{\partial t}\, \mathfrak{r}_0\right] - \operatorname{rot} \left(\frac{\bar{\mathfrak{c}}}{r}\right).$$

Setzen wir dies in (c) ein, so folgt wegen (93) I unter Berücksichtigung aller Unstetigkeitsflächen

$$\text{(e)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{A} = & \int_{\infty} \frac{\operatorname{rot} \mathfrak{c}}{r}_{t - mr} dv + \int_{F_1} \frac{[\mathfrak{n}(\mathfrak{c}_2 - \mathfrak{c}_1)]}{r}_{t - mr} df + \int_{F_1} \left[\mathfrak{c}' \nabla \frac{1}{r}\right]_{t - mr} df - \\ & - \frac{m \partial}{\partial t} \int_{F_1} \frac{1}{r} [\mathfrak{c}' \mathfrak{r}_0]_{t - mr}\, df. \end{aligned} \right.$$

Aus (9), (10) und (29) ergibt sich

$$\text{(f)} \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{c} = - \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sigma \mu \mathfrak{B} + \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\varepsilon \mu}{c^2} - m^2\right) \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} \right\}$$

und aus (8) und (9), ganz analog wie (21)

$$\text{(g)} \qquad 4 \pi \sigma \mu \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{B}}{\partial t^2} = - \operatorname{rot}^2 \mathfrak{B}.$$

Benutzen wir wieder (139) I und berücksichtigen (4) und (g), so erhalten wir einen (23) ähnlichen Ausdruck, nur daß $\mathfrak{E}$ durch $\mathfrak{B}$ ersetzt ist Erweitern wir diesen Ausdruck auf den ganzen Raum, so erhalten wir, da auf F_2 die Oberflächenintegrale verschwinden, und wegen der Stetigkeitsbedingungen (18) und (19), einen Ausdruck, der wegen (f), (29) und (30) gleich der rechten Seite von (e) sein wird. Wir wollen hier diese Rechnung nicht ausführen, weil dies nur eine Wiederholung bedeuten würde, und überlassen es dem Leser, sich von der Richtigkeit unsrer Behauptung zu überzeugen.

Es ist also

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathfrak{A}. \tag{31}$$

Anderseits folgt aus (26) und (9) unmittelbar

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mu \mathfrak{H} - \operatorname{rot} \mathfrak{A}) = 0, \tag{h}$$

was mit (31) übereinstimmt

Aus (31) und (8) folgt weiter

$$4\pi\mu\mathfrak{J}' = \operatorname{rot}^2 \mathfrak{A}. \tag{32}$$

Ferner läßt sich durch direkte Ausrechnung von $\operatorname{div} \mathfrak{A}$ zeigen, daß

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = -m^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \int_{F_1} \left\{ \mu_2 \operatorname{rot}\left(\frac{\overline{\mathfrak{H}}_2}{r}\right) - \mu_1 \operatorname{rot}\left(\frac{\overline{\mathfrak{H}}_1}{r}\right) \right\} \mathfrak{n}\, df,$$

wo der Strich über $\mathfrak{H}$ bedeutet, daß t durch $t - mr$ ersetzt ist Da alle Unstetigkeitsflächen geschlossen sind, so geht der letzte Ausdruck wegen (88) I über in

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} = -m^2 \frac{\partial \psi}{\partial t}. \tag{33}$$

Aus (32) ergibt sich

$$4\pi\mu\mathfrak{J}' = 4\pi\mu\mathfrak{J} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{rot}^2 \mathfrak{A} = \nabla \operatorname{div} \mathfrak{A} - \nabla^2 \mathfrak{A}.$$

Setzen wir hier den Wert von $\mathfrak{E}$ aus (26) ein, so folgt wegen (33)

$$4\pi\mu\mathfrak{J} = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} + \left(\frac{\varepsilon\mu}{c^2} - m^2\right) \nabla \frac{\partial \psi}{\partial t} - \nabla^2 \mathfrak{A} \tag{34}$$

Weiter ergibt (26), (5) und (33)

$$\varrho' = \frac{m^2}{4\pi c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\operatorname{div} \nabla \psi}{4\pi c^2}. \tag{35}$$

Wir wollen jetzt $\mathfrak{E}$ mit Hilfe des Ausdruckes (109) I oder (111) I darstellen. Dazu beachten wir, daß (140a) I, wie dies am Schluß von Nr. 22 a I bemerkt ist, für $b = 0$ in (109) I übergeht. Wir brauchen deshalb in den vorhin abgeleiteten Ausdrücken nur $m = 0$ zu setzen, um die gesuchte Darstellung zu erhalten

Aus (26)—(30) folgt bei $m = 0$

$$\mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{A}'}{\partial t} - \nabla \psi' \tag{36}$$

$$\mathfrak{A}' = \int\limits_{\infty} \frac{\mathfrak{J}'\mu}{r}\, dv + \int\limits_{F_1} \frac{\mathfrak{c}'}{r}\, df \tag{37}$$

$$\psi' = c^2 \int\limits_{\infty} \frac{\varrho'}{r}\, dv + c^2 \int\limits_{F_1} \frac{\eta'}{r}\, df, \tag{38}$$

(39) aus (33)
$$\operatorname{div} \mathfrak{A}' = 0,$$

(40) aus (32)
$$4\pi\mu\mathfrak{J}' = \operatorname{rot}^2 \mathfrak{A}'$$

oder wegen (39)

$$4\pi\mu\mathfrak{J}' = -\nabla^2 \mathfrak{A}', \tag{40a}$$

was auch unmittelbar aus (37) und (119) I folgt. Weiter ergibt (35)

$$4\pi\varrho' c^2 = -\operatorname{div} \nabla \psi' \tag{41}$$

was sich auch aus (38) und (107a) I ableiten laßt.

Aus (31) erhalten wir endlich

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathfrak{A}' \tag{42}$$

Selbstverständlich kann man (36)—(42) auch direkt aus (109) oder (111) I mit Hilfe von (8) und (9) ableiten, wovon man sich durch eine Nachrechnung überzeugen kann.

Die Funktion ψ' ist ein gewohnliches Potential, wie p in Nr. **30**, und $\mathfrak{A}'$, wegen des am Schluß von Nr. **20** I Gesagten, ein Vektorpotential. Die Größen $\mathfrak{A}$ und ψ bezeichnet man deshalb als retardierte Potentiale.

36. Ableitung der Thomsonschen Schwingungsgleichung. Wir wollen die in Nr 35 abgeleiteten Ausdrücke durch einige Beispiele erläutern. Vorher möchten wir aber noch einige Bemerkungen einflechten.

Betrachten wir den Ausdruck (37). Das Volumenintegral hangt vom Gesamtstrom $\mathfrak{J}'$ ab und ist über den ganzen Raum zu nehmen.

Aus (15) folgt

(a)
$$\mathfrak{J}' = \sigma\left(\mathfrak{E} + \tau \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\right).$$

Wegen der sehr kleinen Relaxationszeit τ können wir innerhalb eines Leiters bei nicht zu schnellen Schwingungen das zweite Glied in (a) vernachlässigen und

(b)
$$\mathfrak{J}' = \sigma \mathfrak{E} = \mathfrak{J}$$

setzen. Dann ist

(c)
$$\int\limits_{\infty} \frac{\mathfrak{J}'\mu}{r}\, dv = \int\limits_{V_2} \frac{\mathfrak{J}\mu}{r}\, dv + \int\limits_{\infty - V_2} \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\, dv,$$

wo V_2 das vom Leiter eingenommene Volumen bedeutet und $\infty - V_2$ den übrigen Raum. Über das letzte Integral können wir im allgemeinen nichts aussagen, da uns die Verteilung des Verschiebungsstromes $\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{\varepsilon}{4\pi c^2} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$ im Raum $\infty - V_2$ in den meisten Fällen unbekannt ist. Hier tritt der Vorteil von (26)—(28) zutage. Denn

(d) setzen wir
$$m = \frac{1}{c},$$

so ist für den Äther $\mathfrak{c} = 0$ (siehe (29)), da dort $\sigma = 0$ und $\mu = \varepsilon = 1$ ist, und wir erhalten

(43)
$$\mathfrak{A} = \int\limits_{V_1} \left[\frac{\mathfrak{c}}{r}\right]_{t - \frac{r}{c}} dv + \int\limits_{F_1} \left[\frac{\mathfrak{c}'}{r}\right]_{t - \frac{r}{c}} df,$$

wo sich V_1 nur auf den von materiellen Körpern eingenommenen Raum bezieht.

Es ist jetzt aber wegen (15) und (d)

(e)
$$\mathfrak{c} = \sigma\mu \left\{\mathfrak{E} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{\varepsilon\mu}\, \tau \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\right\},$$

so daß wir auch hier bei nicht zu schnellen Schwingungen innerhalb eines Leiters die Beziehung (b) gelten lassen können.

Wir wollen jetzt der Einfachheit halber annehmen, es sei überall

(f)
$$\varrho = \varepsilon \varrho' = 0, \qquad \mu = 1,$$

und es seien nur Leiter im Feld vorhanden. Außerhalb der Leiter

(g) ist also
$$\sigma = 0, \qquad \varepsilon = 1.$$

Dann wird $\mathfrak{c}' = 0$, und wir erhalten wegen (c), (f) und (g)

(h) $$\mathfrak{A}' = \int\limits_{V_2} \frac{\mathfrak{J}}{r}\, dv + \frac{1}{c^2} \int\limits_{\infty - V_2} \frac{1}{r} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\, dv$$

(i) $$\psi' = c^2 \int\limits_{F_1} \frac{\eta'}{r}\, df$$

und aus (43) und (b)

(44) $$\mathfrak{A} = \int\limits_{V_2} \frac{\mathfrak{J}}{r}\, dv_{t - \frac{r}{c}}$$

(k) und $$\psi = c^2 \int\limits_{F_1} \frac{\eta'}{r}\, df_{t - \frac{r}{c}}.$$

Ein Vergleich von (44) und (h) zeigt, daß wir durch Einführung der retardierten Werte uns von dem zweiten Integral in (h) befreit haben. Dies ist im allgemeinen der Vorteil der Darstellung von $\mathfrak{E}$ mit Hilfe von $\mathfrak{A}$ und ψ bei Einhaltung der Beziehung (d) Denn über die Verteilung der Leitungsströme können wir uns bei manchen Problemen eine Vorstellung machen.

Haben wir es mit sehr langsamen Schwingungen zu tun, d h betrachten wir einen quasistationären Zustand, und sind die Entfernungen der Körper untereinander von solcher Größe, daß $\frac{r}{c}$ sehr klein im Vergleich zur Schwingungsperiode ist, so können wir, ohne große Fehler zu begehen, in (44) und (k) statt der retardierten die momentanen Werte einsetzen. Dann geht aber (k) in (i) über, und

(l) es wird $$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}' = \int\limits_{V_2} \frac{\mathfrak{J}}{r}\, dv$$

D. h. bei quasistationären Vorgängen können wir bei der Berechnung von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ aus (26) und (31) mit (i) und dem ersten Integral von (h) oder mit (l) rechnen. Wir sehen also, daß in diesem Fall das zweite Integral in (h) zu vernachlässigen ist.

Als positive Normale wollen wir jetzt die vom Leiter in den freien Äther rechnen. Dann folgt aus (d) Nr. 34

(m) $$\mathfrak{J}_n = \frac{\partial \eta}{\partial t}.$$

Hieraus und aus (i) und (k) ergibt sich

$$\frac{\partial \psi'}{\partial t} = c^2 \int\limits_{F_1} \frac{\mathfrak{J}\mathfrak{n}}{r}\, df \tag{45}$$

(46) und
$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = c^2 \int\limits_{F_1} \frac{\mathfrak{J}\mathfrak{n}}{r}\, df_{t-\frac{r}{c}},$$

wo demnach unter F_1 die Oberfläche des Leiters zu verstehen ist

Fur einen quasistationären Zustand erhalten wir deshalb aus (36), (44) und (45)

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int\limits_{V_2} \frac{\mathfrak{J}}{r}\, dv - c^2 \nabla \int\limits_{F_1} \frac{\mathfrak{J}\mathfrak{n}}{r}\, df \tag{47}$$

und für schnelle Schwingungen aus (26), (44) und (46)

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int\limits_{V_2} \frac{\mathfrak{J}}{r}\, dv_{t-\frac{r}{c}} - c^2 \nabla \int\limits_{F_1} \frac{\mathfrak{J}\mathfrak{n}}{r}\, df_{t-\frac{r}{c}} \tag{48}$$

Wir gehen jetzt zur Ableitung der Thomsonschen Schwingungsgleichung über. Die Schwingungen finden in einem Stromkreis ABE statt, der an einen Kondensator C angeschlossen ist (Fig. 11).

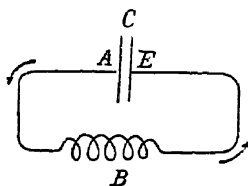



Fig 11

Wir setzen einen quasistationaren Zustand voraus und nehmen außerdem an, daß der Leitungsstrom **nur** innerhalb des Kondensators normal zu F_1 ist. Wir benutzen also die Gleichung (47) Hierbei ist das Volumenintegral über den Leiter $A\,B\,E$ und das Oberflächenintegral über beide Platten f_1 und f_2 des Kondensators zu erstrecken.

Wegen der Voraussetzung eines quasistationaren Zustandes wird der Stromkreis phasengleich schwingen, und wir haben keine Phasendifferenzen des Stromes

Den Gesamtstrom innerhalb des Leiters bezeichnen wir mit i Seine positive Richtung ist durch den Pfeil (Fig. 12) gekennzeichnet.

Bedeutet $d\mathfrak{r}$ ein Linienelement längs der positiven Richtung des Stromes, so können wir innerhalb des Drahtes setzen

$$\mathfrak{E}\, d\mathfrak{r} = \frac{i\, d\, l}{\sigma q}; \tag{n}$$

q ist der Querschnitt des Drahtes. Aus (n) folgt

$$\text{(p)} \qquad \int\limits_{ABE} \mathfrak{E}\, d\mathfrak{r} = i \int\limits_{ABE} \frac{dl}{\sigma q} = i w,$$

wo w den gesamten Widerstand des Drahtes bedeutet. Daß i konstant längs ABE ist, folgt aus der Phasengleichheit und aus der Kontinuität des Stromes Weiter können wir setzen

$$\text{(q)} \qquad \int\limits_{ABE} d\mathfrak{r} \int\limits_{V_2} \frac{\mathfrak{J}}{r}\, dv = \int\limits_{ABE} \mathfrak{A}\, d\mathfrak{r} = iL,$$

wo L die Induktivitat des Drahtes ABE bedeutet[1]) Aus (q), (n) und (47) erhalten wir demnach

$$\text{(r)} \qquad w \frac{di}{dt} = -L \frac{d^2 i}{dt^2} - c^2 \int\limits_{ABE} d\mathfrak{r} \nabla \int\limits_{f} \frac{\mathfrak{J}\mathfrak{n}}{r}\, df.$$

Bei der Integration über eine geschlossene Kurve verschwindet das letzte Integral. Deshalb ist

$$\text{(s)} \qquad \begin{cases} c^2 \int\limits_{ABE} d\mathfrak{r} \nabla \int\limits_{f} \frac{\mathfrak{J}\mathfrak{n}}{r}\, df = A = -c^2 \int\limits_{EA} d\mathfrak{r} \nabla \int\limits_{f} \frac{\mathfrak{J}\mathfrak{n}}{r}\, df = \\ \qquad\qquad = -c^2 \int\limits_{EA} d\mathfrak{r} \int\limits_{f} \frac{\mathfrak{J}\mathfrak{n}\mathfrak{r}_0}{r^2}\, df. \end{cases}$$

Wir nehmen ferner an, daß auf jeder Platte $\mathfrak{J}\mathfrak{n}$ konstant ist.

Wir bezeichnen mit d den Plattenabstand und setzen ihn klein im Vergleich zur Plattengröße voraus Der Einheitsvektor längs d sei $\mathfrak{l}_0$, positiv gerechnet im Sinne des Leitungsstromes, also von E zu A (Fig. 11) Demnach ist fur die linke Platte f_1 $\mathfrak{l}_0 = -\mathfrak{n}$ und für die rechte f_2 $\mathfrak{l}_0 = +\mathfrak{n}$ Indem wir $d\mathfrak{r} = \mathfrak{l}_0 d$ setzen, erhalten wir für die linke und die rechte Platte

$$A_1 = -c^2 d \cdot \mathfrak{J}\mathfrak{l}_0 \int\limits_{f_1} \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{r}_0}{r^2}\, df; \qquad A_2 = -c^2 d \cdot \mathfrak{J}\mathfrak{l}_0 \int\limits_{f_2} \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{r}_0}{r^2}\, df$$

und $A = A_1 + A_2$. Jedes dieser Integrale ist gleich dem räumlichen Winkel, unter dem man vom Aufpunkt aus f_1 oder f_2 sieht, und zwar mit negativem Zeichen, da $\mathfrak{n}$ von der Platte weg gerichtet ist. Beachten wir, daß bei der Integration längs EA in (s) der Aufpunkt

---

1) Siehe Bd 3 dieser Sammlung S. 107 und ff

sich längs EA bewegt, also weit vom Rande des Kondensators, und daß d klein ist, so kann man diese beiden Integrale einander gleich und gleich -2π setzen. Wir erhalten deshalb

$$A = 4\pi d \cdot \mathfrak{J}\mathfrak{l}_0 c^2.$$

Bezeichnen wir mit S die eine Fläche des Kondensators, so ist wegen der Kontinuität des Stromes

$$i = S\mathfrak{J}\mathfrak{l}_0,$$

(t) woraus sich
$$A = \frac{i}{C}$$

(u) ergibt, wenn
$$C = \frac{S}{4\pi c^2 d}$$

die Kapazität des Kondensators bedeutet.

Aus (t) und (r) erhalten wir

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + w\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0, \tag{v}$$

und dies ist die gesuchte Thomsonsche Gleichung.[1])

37. Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen längs eines Drahtes. Wir haben in Nr. 36 ein Beispiel für einen quasistationären Zustand gegeben. Jetzt wollen wir zu schnellen Schwingungen übergehen, wozu wir der retardierten Werte bedurfen und deshalb (48) benützen werden. Als Beispiel werden wir die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen längs eines unendlich langen geraden Drahtes von kreisförmigem Querschnitt q untersuchen.

Wir legen die z-Achse in die Achse des Drahtes (Fig. 12) und rechnen z von O aus positiv im Sinne des Pfeiles mit dem Einheitsvektor $\mathfrak{k}$. Der Aufpunkt P soll sich in einer solchen Entfernung von der Achse z befinden, daß wir r auf einem beliebigen Querschnitt q des Drahtes als konstant annehmen können Zerlegen wir jetzt $\mathfrak{J}$ senkrecht und parallel zur Achse und integrieren über ein Stück des Drahtes von der Länge dz, so ist

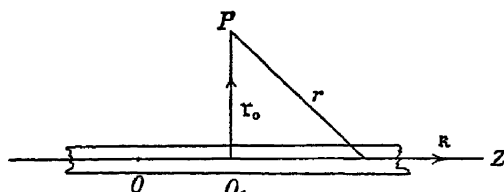



Fig 12

$$\int \mathfrak{J} dv = \mathfrak{J} q dz = \mathfrak{k} u dz, \tag{a}$$

1) Siehe Bd. 3 dieser Sammlung S 115.

wo u den Betrag des gesamten parallel zur Achse fließenden Stromes für irgend ein z bedeutet Denn es ist klar, daß die zur Achse senkrechten Teile von $\mathfrak{J}$ sich bei der Summation, aus Symmetriegründen, gegenseitig vernichten.

Da in Metallen stets $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J}$ und daher nach (17) $\operatorname{div} \mathfrak{J} = 0$ ist, so ist der normal zur Oberfläche des Drahtes fließende Strom, auf die Einheit der Länge berechnet, gleich $-\frac{\partial u}{\partial z}$ Deshalb ist

$$\text{(b)} \qquad \int \mathfrak{J}\mathfrak{n}\, df = -\frac{\partial u}{\partial z}\, dz,$$

wo das Integral wieder längs einem Stück dz des Drahtes zu nehmen ist. Demnach erhalten wir aus (a), (b) und (48)

$$\text{(c)} \qquad \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = -\mathfrak{k}\, \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{r}\, dz_{t-\frac{r}{c}} + c^2 \nabla \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{r}\, \frac{\partial u}{\partial z}\, dz_{t-\frac{r}{c}}.$$

Wir setzen jetzt

$$\text{(d)} \qquad u = u_0\, e^{i(\omega t - z b)},$$

$$\text{(e)} \quad \text{wo} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad b = \frac{2\pi}{\lambda_1} = \frac{2\pi}{c_1 T} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

ist und T die Schwingungsperiode, c_1 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, λ_1 die entsprechende Wellenlänge und u_0 die konstante Amplitude des Stromes bedeutet.

Die Annahme (d) widerspricht eigentlich dem in Nr. 35 Gesagten Denn aus (d) folgt, daß u auch bei $z = \pm \infty$ nicht Null ist Wenn wir dennoch (d) beibehalten, so müssen wir dies als eine mathematische Abstraktion betrachten, die uns den Fall darstellen soll, wo (d) nur für ein sehr langes Stück des Drahtes erfüllt ist, während man die Wirkung der beiden Enden vernachlässigt. Wegen des Vorkommens von r im Nenner von (c) kann man praktisch das betrachtete sehr lange Stück als unendlich lang ansehen

Setzen wir $OO_1 = z_1$ und rechnen jetzt z von O_1 aus, so folgt aus (c) und (d)

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \mathfrak{k} \cdot u_0\, \omega^2 e^{i(\omega t - z_1 b)} A - i c^2 u_0 b\, e^{i\omega t} \nabla e^{-i z_1 b} A$$

$$\text{(f)} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{E} = -\mathfrak{k} i u_0\, \omega\, e^{i(\omega t - z_1 b)} A - \frac{c^2}{\omega} u_0 b\, e^{i\omega t} \nabla e^{-i z_1 b} A,$$

$$\text{(g)} \quad \text{wo} \quad A = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\left(\frac{\omega r}{c} + z b\right)}}{r}\, dz = 2 \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{i\omega r}{c}} \cos b z}{r}\, dz$$

bedeutet. Bezeichnen wir O_1P mit R (Fig. 12), so konnen wir statt (g) auch schreiben

$$\text{(h)} \qquad A = 2\int_R^\infty \frac{e^{-\frac{i\omega r}{c}} \cos b\sqrt{r^2 - R^2}}{\sqrt{r^2 - R^2}}\, dr,$$

da $r^2 = R^2 + z^2$ ist. Dieses Integral laßt sich mit Hilfe der Besselschen Funktionen[1]) ermitteln und ist gleich

$$\text{(i)}^{2)} \qquad A = -i\pi H_2^0(Rp),$$

$$\text{(k)} \quad \text{wo} \qquad p = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{c^2}{c_1^2}}$$

ist und H_2^0 die sogenannte Hankelsche Zylinderfunktion zweiter Gattung und nullter Ordnung darstellt, die sich aus

$$\text{(l)} \qquad H_2^0(Rp) = J_0(Rp) - iY_0(Rp)$$

berechnen läßt. Da sich aber c_1 sehr wenig von c unterscheidet, so wird p sehr klein sein, und wir können naherungsweise

$$\text{(m)} \qquad H_2^0(Rp) = -\frac{2i}{\pi}\ln\frac{Rpi\gamma}{2}$$

setzen Hier ist $\ln\gamma = C = -\Psi(0) = 0{,}5772\ldots$ die Eulersche Konstante und ln bedeutet den natürlichen Logarithmus

Wir erhalten deshalb aus (f), (i) und (m)

$$\text{(n)} \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{k}\cdot 2iu_0\omega\cdot\lg Rx\cdot e^{i(\omega t - z_1 b)} + \frac{2c^2}{\omega}u_0 b e^{i\omega t}\nabla e^{-iz_1 b}\lg Rx,$$

$$\text{(o)} \quad \text{wo} \qquad x = \frac{p\gamma i}{2}.$$

Bezeichnen wir mit Z die Komponente von $\mathfrak{E}$ längs z, mit Q die Komponente senkrecht zu z, mit $\mathfrak{r}_0'$ einen zu z senkrechten Einheitsvektor (Fig 12) und beachten, daß

$$\mathfrak{r}_0'\nabla = \frac{\partial}{\partial R} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{k}\nabla = \frac{\partial}{\partial z_1}$$

---

1) Siehe Bd 4 dieser Sammlung. Formel 2 (7a) und 16 (7a) S 124, 125

2) Siehe N Nielsen, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. Leipzig 1904, B G Teubner, S 254, Formel (9). Es ist dabei $\nu = -\frac{1}{2}$ und $\sigma = \frac{1}{2}$ gesetzt worden

ist, so folgt aus (n)

$$\text{(p)} \qquad \mathfrak{E}\mathfrak{k} = Z = \frac{2 i u_0 c^2}{\omega} p^2 \lg Rx \quad e^{i(\omega t - z_1 b)}$$

$$\text{(q) und} \qquad \mathfrak{E}\mathfrak{r}_0' = Q = \frac{2 c^2 u_0}{R c_1} e^{i(\omega t - z_1 b)}$$

Ist $c = c_1$, so ergibt sich $Z = 0$ und

$$\text{(r)[1]} \qquad Q = \frac{2 c u_0}{R} e^{i(\omega t - z_1 b)}$$

Weiter wird

$$\text{(s)} \qquad \mathfrak{A} = \int\limits_V \frac{\mathfrak{J}}{r}_{t - \frac{r}{c}} dv = -\mathfrak{k} 2 u_0 \lg Rx \cdot e^{i(\omega t - z_1 b)}$$

und hieraus und aus (31)

$$\text{(t)} \qquad \mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A} = \frac{2 u_0}{R} e^{i(\omega t - z_1 b)} [\mathfrak{k}\mathfrak{r}_0'].$$

38. Das Huygenssche Prinzip. Angenommen, wir wollen für den Aufpunkt die Lichterregung berechnen, die von einer entfernten Lichtquelle herrührt. Das Huygenssche Prinzip sagt uns dann, daß, wenn wir um den Aufpunkt P eine Fläche F legen, die P, aber nicht die Lichtquelle einschließt, wir die Lichterregung in P so berechnen können, als ob die Fläche F selbst in allen ihren Punkten leuchte. D. h wir können bei der Berechnung der Lichterregung in P jeden Punkt von F als eine Erregerquelle ansehen. Wir wollen jetzt unter dem Gesichtspunkt dieses Prinzips den Ausdruck (23) untersuchen.

Auch jetzt wollen wir die Bedingung (24) aufrecht erhalten, denn $\mathfrak{E}$ kann nicht von den Zuständen zu einer späteren Zeit $(t + mr)$ abhängen.

Wir ersehen aus (23), daß $\mathfrak{E}$ außer von Oberflächenintegralen auch von Volumenintegralen abhängt. Von diesen verschwindet aber das zweite. Denn aus (14) folgt, daß ϱ' entweder konstant ist und zwar für Dielektrika $(\sigma = 0)$ oder in Abhängigkeit von der Relaxationszeit verschwindet Da wir aber periodische Zustände betrachten, so nehmen wir $\varrho' = 0$ an. Es bleibt also nur das erste Volumenintegral in (23) übrig Dies verträgt sich aber nicht mit dem Huygensschen Prinzip. Gelingt es uns deshalb einen solchen Wert für b zu finden, bei dem dieses Integral verschwindet, so können wir

---

1) Siehe J. J. Thomson, Notes on Recent Researches in Electricity and Magnetism. Oxford 1893, Art 269, S 282, und H. Hertz, Gesammelte Werke Bd. II, S 168

aus dem gefundenen Wert für b die Fortpflanzungsgeschwindigkeit berechnen, die dem Huygensschen Prinzip entspricht; und die Oberflächenintegrale, mit dem entsprechenden Wert von b behaftet, werden dieses Prinzip ausdrücken

Wir setzen jetzt

$$\text{(a)} \qquad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 e^{i\omega t},$$

wo die Amplitude $\mathfrak{E}_0$ nur noch von den Koordinaten abhängt. Aus (a) ergibt sich

$$4\pi\sigma\mu\mathfrak{E} + \left(\frac{\varepsilon\mu}{c^2} - b^2\right)\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} = \mathfrak{E}_0 e^{i\omega t}\left\{4\pi\sigma\mu + i\omega\left(\frac{\varepsilon\mu}{c^2} - b^2\right)\right\}.$$

Es verschwindet deshalb das erste Volumenintegral in (23) für

$$\text{(b)[1]} \qquad b^2 = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} - \frac{4\pi\sigma\mu i}{\omega}.$$

Da b in der Verbindung $t + br$ auftritt, so hat br die Dimension einer Zeit und b die einer reziproken Geschwindigkeit

Wir nehmen vorläufig $\sigma = 0$ an. Dann ist $b^2 = \frac{\varepsilon\mu}{c^2}$ und

$$\text{(c)} \qquad b = -m = -\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{c}$$

$$\text{(d)} \quad \text{oder} \qquad v = \frac{1}{m} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Dies ist aber bekanntlich nichts anderes als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Störungen in einem Dielektrikum.[2]) Der Brechungsexponent ν berechnet sich aus (d) zu

$$\text{(e)} \qquad \nu = \frac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon\mu}.$$

Nebenbei sei bemerkt, daß bei dem Werte (c) für b $(\sigma = 0)$ das Volumenintegral auch dann verschwindet, wenn $\mathfrak{E}$ eine beliebige Funktion der Zeit ist.

Wir gehen jetzt zu dem allgemeinen Fall $(\sigma \neq 0)$ über und setzen

$$\text{(f)} \qquad b = -\frac{\nu}{c} + \frac{i\varkappa}{c},$$

wo wir unter ν und $\varkappa$ positive reelle Größen verstehen wollen Das Minuszeichen von ν wählten wir deshalb, weil bei $\sigma = 0$ $\varkappa = 0$ wird

---

1) Siehe v. Ignatowsky, Ann. d. Physik **25**, 114, 1908 Dort ist $\mu = 1$ gesetzt.

2) Siehe Bd. 3 dieser Sammlung S 134.

und dann (f) in (c) übergehen muß. Das Pluszeichen vor $\varkappa$ wird sich später rechtfertigen. Aus (f) und (b) ergibt sich

$$\text{(g)} \quad \begin{cases} \nu = \sqrt{\frac{\mu}{2}\left\{\sqrt{\varepsilon^2 + 4\sigma^2 c^4 T^2} + \varepsilon\right\}}, \\ \varkappa = \sqrt{\frac{\mu}{2}\left\{\sqrt{\varepsilon^2 + 4\sigma^2 c^4 T^2} - \varepsilon\right\}} \end{cases}$$

Ersetzen wir in (a) t durch $t + br$, so erhalten wir

$$\text{(h)} \quad \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_0 e^{-\frac{\omega \varkappa r}{c}} e^{i\left(\omega t - \frac{\nu r \omega}{c}\right)}.$$

Und diese Werte von $\mathfrak{E}$ kommen für die Oberflächenintegrale in (23) in Betracht. Aus (h) folgt, daß diese Werte auf den $e^{\frac{\omega \varkappa r}{c}}$ ten Teil vermindert sind und zwar je nach der Entfernung des entsprechenden Oberflachenelementes vom Aufpunkt Man nennt deshalb $\varkappa$ den Extinktionskoeffizienten[1]) Daraus erklärt sich auch das positive Zeichen von $\varkappa$ in (f) Weiter folgt aus (h), daß

$$\text{(i)} \quad v = \frac{c}{\nu}$$

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und ν der Brechungsexponent ist.

Die Werte in (g) stimmen mit dem für Leiter berechneten Wert des Brechungsexponenten überein. Hieraus und aus (d) ersehen wir, daß wir mit Hilfe des Huygensschen Prinzips zu den richtigen Werten jener Großen geführt worden sind.

Für Leiter ist

$$\text{(k)} \quad \sqrt{\varepsilon^2 + 4\sigma^2 c^4 T^2} = \varepsilon \sqrt{1 + \frac{T^2}{4\pi^2\tau^2}}.$$

Ist die Schwingungsperiode T groß im Vergleich zur Relaxationszeit τ, so können wir 1 gegen das zweite Glied in (k) vernachlässigen und in (k) einfach $\frac{\varepsilon T}{2\pi\tau}$ schreiben; dann wird aus (g)

$$\nu = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left\{\frac{T}{2\pi\tau} + 1\right\}}; \qquad \varkappa = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}\left\{\frac{T}{2\pi\tau} - 1\right\}},$$

oder wenn wir 1 gegen $\frac{T}{2\pi\tau}$ vernachlässigen[2]),

$$\text{(l)} \quad \nu = \varkappa = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu T}{4\pi\tau}} = \sqrt{\mu\sigma c^2 T}.$$

---

1) Siehe Bd. 3 dieser Sammlung S 156.
2) Siehe Bd 3 dieser Sammlung S 159.

Wir wollen jetzt unter F die Oberfläche eines Leiters verstehen. Kommt von außen eine elektromagnetische Welle, so wird sie auch in den Leiter eindringen. Ist aber $\frac{\varkappa\omega}{c}$ groß, so muß wegen (h) der Aufpunkt sehr nahe an der Oberfläche liegen, wenn dort die Werte von $\mathfrak{E}$ noch wahrnehmbar sein sollen.

38a. Das Huygenssche Prinzip in der Formulierung von Kirchhoff. Die Gleichungen von Macdonald. Wir wollen noch einige Spezialfälle von (23) betrachten und zwar für das Vakuum. Also wird

$$\text{(a)} \qquad \varepsilon = \mu = 1; \qquad \sigma = 0$$

$$\text{(b) und} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{E} = 0; \qquad \operatorname{div}\mathfrak{H} = 0$$

sein. Bezeichnen wir nun mit q die Komponente von $\mathfrak{E}$ nach einer konstanten Richtung, so folgt aus (22) für q die Wellengleichung:

$$\text{(c)} \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = \operatorname{div}\nabla q = \nabla^2 q$$

Hieraus und aus (139) I erhalten wir, wenn wir dort wieder $b = -\frac{1}{c}$ setzen:

$$\text{(d)} \qquad q = \frac{1}{4\pi}\int\limits_F \left\{\frac{\mathfrak{r}_0\mathfrak{n}}{cr}\frac{\partial q}{\partial t} - q\mathfrak{n}\nabla\frac{1}{r} + \frac{\mathfrak{n}\nabla q}{r}\right\}_{t-\frac{r}{c}} df$$

und dies ist nichts anderes als Kirchhoffs Formulierung des Huygensschen Prinzips für einen Skalar.[1])

Für das Vakuum gehen die Maxwellschen Gleichungen über in:

$$\text{(e)} \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathfrak{H}$$

$$\text{(f) und} \qquad -\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathfrak{E}$$

$$\text{(g) Demnach} \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{E}}{\partial t^2} = -\operatorname{rot}^2\mathfrak{E} = \nabla^2\mathfrak{E}$$

$$\text{(h) und} \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{H}}{\partial t^2} = -\operatorname{rot}^2\mathfrak{H} = \nabla^2\mathfrak{H}.$$

D. h. jede Komponente von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ nach einer konstanten Richtung genügt der Wellengleichung (c)

1) Siehe z. B P. Drude, Lehrbuch der Optik Leipzig, Hirzel, 1906. S 169

Setzen wir nun in (140) I das eine Mal $\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$ und das andere Mal $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$, so fallen wegen (b), (g) und (h) die Volumenintegrale weg Berücksichtigen wir außerdem bei den letzten Oberflächenintegralen in (140) I die Gleichungen (e) und (f), so erhalten wir

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} \mathfrak{E} = \dfrac{\nabla}{4\pi} \displaystyle\int_F \left[\dfrac{\mathfrak{E}\mathfrak{n}}{r}\right]_{t-\frac{r}{c}} df - \operatorname{rot} \mathfrak{M} + \dfrac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t}, \\[2ex] \mathfrak{H} = \dfrac{\nabla}{4\pi} \displaystyle\int_F \left[\dfrac{\mathfrak{H}\mathfrak{n}}{r}\right]_{t-\frac{r}{c}} df - \operatorname{rot} \mathfrak{N} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}, \end{cases}$$

$$\text{(k) wobei} \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{4\pi} \int_F \left[\frac{[\mathfrak{n}\mathfrak{E}]}{r}\right]_{t-\frac{r}{c}} df; \qquad \mathfrak{N} = \frac{1}{4\pi} \int_F \left[\frac{[\mathfrak{n}\mathfrak{H}]}{r}\right]_{t-\frac{r}{c}} df.$$

Dabei haben wir $b = -\frac{1}{c}$ gesetzt

Nehmen wir nun von den Gleichungen (i) den Rotor und berücksichtigen (e) und (f), so ergibt sich:

$$\text{(l)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = -\dfrac{\partial \operatorname{rot} \mathfrak{M}}{\partial t} - c^2 \operatorname{rot}^2 \mathfrak{N}, \\[2ex] \dfrac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\dfrac{\partial \operatorname{rot} \mathfrak{N}}{\partial t} + \operatorname{rot}^2 \mathfrak{M}. \end{cases}$$

Wie man sich nun leicht mit Hilfe von (e) Nr. 22 I überzeugen kann, genügen $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M}$ der Wellengleichung. D h. es wird sein:

$$\text{(m)} \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{N}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathfrak{N}; \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial t^2} = \nabla^2 \mathfrak{M}.$$

Deshalb können wir statt der Gleichungen (l) auch schreiben:

$$\text{(n)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = - c^2 \nabla \operatorname{div} \mathfrak{N} + \dfrac{\partial^2 \mathfrak{N}}{\partial t^2} - \dfrac{\partial \operatorname{rot} \mathfrak{M}}{\partial t}, \\[2ex] \dfrac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \nabla \operatorname{div} \mathfrak{M} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial t^2} - \dfrac{\partial \operatorname{rot} \mathfrak{N}}{\partial t}. \end{cases}$$

Dieses sind die Gleichungen von Macdonald.[1])

Umgekehrt folgen aus den Macdonaldschen Gleichungen (n) infolge von (m) die Gleichungen (l), die demnach mit jenen gleichbedeutend sind.

---

1) Macdonald, Elektr Waves, 1902, pag 16—17 und auch Phil. Trans. of the Royal Soc London 1913, Vol. 212 pag. 299.

Gehen wir jetzt zu zeitlich rein periodischen Zuständen über, setzen also überall $\mathfrak{E}e^{i\omega t}$ und $\mathfrak{H}e^{i\omega t}$ statt $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ und streichen hinterher den Faktor $e^{i\omega t}$, so erhalten wir aus (i):

$$\text{(o)} \quad \begin{cases} \mathfrak{E} = \dfrac{\nabla}{4\pi}\displaystyle\int\limits_F \dfrac{\mathfrak{E}\mathfrak{n}e^{-i\varkappa r}}{r}\,df - \operatorname{rot}\mathfrak{M} + ic\varkappa\,\mathfrak{N}, \\ \mathfrak{H} = \dfrac{\nabla}{4\pi}\displaystyle\int\limits_F \dfrac{\mathfrak{H}\mathfrak{n}e^{-i\varkappa r}}{r}\,df - \operatorname{rot}\mathfrak{N} - \dfrac{i\varkappa}{c}\,\mathfrak{M}, \end{cases}$$

und statt (l):

$$\text{(p)} \quad \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \frac{ic}{\varkappa}\operatorname{rot}^2\mathfrak{N} - \operatorname{rot}\mathfrak{M}, \\ \mathfrak{H} &= -\frac{i}{c\varkappa}\operatorname{rot}^2\mathfrak{M} - \operatorname{rot}\mathfrak{N}, \end{aligned}$$

und statt (k):

$$\text{(q)} \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_F \frac{[\mathfrak{n}\mathfrak{E}]e^{-i\varkappa r}}{r}\,df; \qquad \mathfrak{N} = \frac{1}{4\pi}\int\limits_F \frac{[\mathfrak{n}\mathfrak{H}]e^{-i\varkappa r}}{r}\,df,$$

(r) wobei
$$\varkappa = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{cT}$$

und λ die Wellenlänge im Vakuum ist.

Wir heben noch einmal besonders hervor, daß alle hier abgeleiteten Beziehungen aus den Maxwellschen Gleichungen folgen mit Hilfe der Formeln (139) I und (140) I, die unabhängig von jeder physikalischen Anwendung als gewisse Raumgesetze zu betrachten sind.

38b Beziehungen zwischen den Maxwellschen Gleichungen im Vakuum und dem Huygensschen Prinzip. Wir denken uns den Aufpunkt wieder innerhalb eines Volumens V, das zusammen mit seiner Oberfläche F vollkommen im Vakuum liegen soll. Wollen wir nun z. B die elektrische Feldstärke für den Aufpunkt berechnen und nehmen hierbei das Huygenssche Prinzip als richtig an, d. h. daß kein Volumenelement leuchten soll (siehe Nr. 38), so müssen, wenn wir in (140) I $\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$ setzen, die Volumenintegrale dort identisch verschwinden. D. h es muß sein:

$$\text{(a)} \quad \operatorname{div}\mathfrak{E} = 0$$

(b) und:
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{E}}{\partial t^2} = -\operatorname{rot}^2\mathfrak{E},$$

wobei wir in (140) I $b = -\dfrac{1}{c}$ gesetzt haben.

Da nun die Dichte ϱ im Vakuum an und für sich verschwinden muß, so konnen wir (a) auch unabhängig von dem Huygensschen Prinzip annehmen.

Setzen wir die zweite Maxwellsche Gleichung (f) Nr. **38a** als richtig für das Vakuum voraus, so folgt aus ihr und (b):

$$\text{(c)} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} - \operatorname{rot}\mathfrak{H}\right\} = 0.$$

Die Klammer in (c) ist also eine von der Zeit unabhängige Größe, wie auch immer $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ von t abhängen mögen. Da nun aber diese Größe bei statischen Zuständen sicher verschwindet, so fließt aus (c) die erste Maxwellsche Gleichung (e) Nr. **38a.**

Hätten wir umgekehrt die erste Maxwellsche Gleichung als richtig für das Vakuum angesehen und in (140) I $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ gesetzt, so kämen wir nach dem Huygensschen Prinzip ebenso zu der zweiten Maxwellschen Gleichung

Wir können deshalb sagen, daß im reinen Vakuum auf Grund des Huygensschen Prinzips eine von den beiden Maxwellschen Gleichungen als die Folge der anderen angesehen werden kann.

VII. Maxwell-Hertzsche Elektrodynamik.

Bewegte Körper.

39. Hauptgleichungen. Energiegleichung. Da hier $\mathfrak{v}$ von Null verschieden angenommen wird, so erhalten wir aus (1) und (2) Nr **32** infolge von (6) Nr. **22** und (4) Nr. **32**, da die Gleichungen für eine beliebige Fläche gelten,

$$\text{(1)} \qquad 4\pi\mathfrak{J} + \frac{\mathfrak{v}\operatorname{div}\varepsilon\mathfrak{E}}{c^2} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varepsilon\mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{rot}\left(\mathfrak{H} - \frac{[\varepsilon\mathfrak{E}\mathfrak{v}]}{c^2}\right)$$

$$\text{(2)} \quad \text{und} \qquad -\frac{\partial\mu\mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}\left(\mathfrak{E} + [\mu\mathfrak{H}\mathfrak{v}]\right),$$

die Maxwell-Hertzschen Hauptgleichungen für bewegte isotrope Körper in Differentialform Wir setzen wieder voraus, daß ε und μ unabhängig von der Zeit sind in substanzieller Beziehung (siehe Nr **22**), d. h. für ein bestimmtes Korperteilchen. Dann ist

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 0; \qquad \frac{d\mu}{dt} = 0,$$

und aus (3) Nr. **22** folgt

(a) $$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\mathfrak{v}\nabla\varepsilon, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial t} = -\mathfrak{v}\nabla\mu.$$

Die Energiedichte e ist auch hier

(3) $$e = \frac{\varepsilon}{c^2}\frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi} + \frac{\mu\mathfrak{H}^2}{8\pi}.$$

Wir wollen jetzt die Änderung der Gesamtenergie E innerhalb eines Volumens V, d h die Änderung des Integrals

(b) $$E = \int_V e\,dv$$

untersuchen unter der Voraussetzung, daß innerhalb V keine Unstetigkeitsflächen vorhanden sind Wir erhalten dann aus (9) Nr. **22**

(c) $$\frac{dE}{dt} = \int_V \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} e\mathfrak{v}\right) dv.$$

Es ist aber wegen (a)

$$\frac{\partial \varepsilon\mathfrak{E}^2}{\partial t} = -\mathfrak{E}^2\cdot\mathfrak{v}\nabla\varepsilon + \varepsilon\frac{\partial\mathfrak{E}^2}{\partial t} = -\mathfrak{E}^2\cdot\mathfrak{v}\nabla\varepsilon + 2\frac{\partial\varepsilon\mathfrak{E}^2}{\partial t} - 2\mathfrak{E}\frac{\partial\varepsilon\mathfrak{E}}{\partial t}$$

(d) oder $$\frac{\partial \varepsilon\mathfrak{E}^2}{\partial t} = \mathfrak{E}^2\cdot\mathfrak{v}\nabla\varepsilon + 2\mathfrak{E}\frac{\partial\varepsilon\mathfrak{E}}{\partial t}.$$

Ebenso bekommen wir

(e) $$\frac{\partial \mu\mathfrak{H}^2}{\partial t} = \mathfrak{H}^2\cdot\mathfrak{v}\nabla\mu + 2\mathfrak{H}\frac{\partial\mu\mathfrak{H}}{\partial t}.$$

Aus (3), (d) und (e) folgt deshalb

(f) $$\frac{\partial e}{\partial t} = -\mathfrak{K}_1\mathfrak{v} - \mathfrak{K}_2\mathfrak{v} - A,$$

(4) wo $$\mathfrak{K}_1 = -\frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi c^2}\nabla\varepsilon,$$

(5) $$\mathfrak{K}_2 = -\frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}\nabla\mu$$

(g) und $$A = -\frac{\mathfrak{E}}{4\pi c^2}\frac{\partial\varepsilon\mathfrak{E}}{\partial t} - \frac{\mathfrak{H}}{4\pi}\frac{\partial\mu\mathfrak{H}}{\partial t}.$$

Aus den Hauptgleichungen (1) und (2) erhalten wir unter Berücksichtigung von (63) I und (3)

$$\text{(h)} \left\{ \begin{aligned} A - \operatorname{div} e\mathfrak{v} = \mathfrak{J}\mathfrak{E} + \mathfrak{v}\frac{\mathfrak{E}\operatorname{div}\varepsilon\mathfrak{E}}{4\pi c^2} - \mathfrak{v}\frac{[\varepsilon\mathfrak{E}\operatorname{rot}\mathfrak{E}]}{4\pi c^2} - \mathfrak{v}\frac{[\mu\mathfrak{H}\operatorname{rot}\mathfrak{H}]}{4\pi} + \\ + \operatorname{div}\mathfrak{S} + \operatorname{div}\mathfrak{N}, \end{aligned} \right.$$

wo $\mathfrak{S}$ den Poyntingschen Strahlungsvektor (12) Nr. 33 bedeutet und

$$\text{(i)} \qquad \mathfrak{N} = \frac{-1}{4\pi}\left\{\frac{\varepsilon\mathfrak{E}}{c^2}\ \mathfrak{E}\mathfrak{v} - \frac{\mathfrak{v}}{2c^2}\cdot\varepsilon\mathfrak{E}^2 + \mu\mathfrak{H}\cdot\mathfrak{H}\mathfrak{v} - \frac{\mathfrak{v}}{2}\cdot\mu\mathfrak{H}^2\right\} \quad \text{ist.}$$

Wir erhalten deshalb aus (c), (f), (h) und (i), unter Anwendung des Gaußschen Satzes,

$$\text{(6)} \qquad -\frac{dE}{dt} = \int\limits_F \mathfrak{S}\,d\mathfrak{f} + \int\limits_V \mathfrak{J}\mathfrak{E}\,dv + \int\limits_F \mathfrak{P}_2\mathfrak{v}\,df + \int\limits_V \mathfrak{K}\mathfrak{v}\,dv,$$

$$\text{(7)} \quad \text{wo} \quad \mathfrak{P}_2 = -\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\varepsilon\mathfrak{E}}{c^2}\cdot\mathfrak{E}\mathfrak{n} - \frac{\mathfrak{n}}{2}\cdot\frac{\varepsilon\mathfrak{E}^2}{c^2} + \mu\mathfrak{H}\ \mathfrak{H}\mathfrak{n} - \mathfrak{n}\cdot\frac{\mu\mathfrak{H}^2}{2}\right\}$$

$$\text{(8)} \quad \text{und} \quad \mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 + \mathfrak{E}\frac{\operatorname{div}\varepsilon\mathfrak{E}}{4\pi c^2} + \frac{[\operatorname{rot}\mathfrak{E}\mathfrak{E}\varepsilon]}{4\pi c^2} + \frac{[\operatorname{rot}\mathfrak{H}\mathfrak{H}\mu]}{4\pi}.$$

Der Ausdruck (6), der die Energiegleichung für bewegte Körper darstellt, bildet ein Analogon zu (11) Nr. 33, nur daß hier noch Glieder hinzukommen, die von der Arbeit abhangen, die von den Kraften des Systems bei der Verschiebung geleistet wird Und zwar bedeutet $\mathfrak{P}_2$ die Oberflächenkraft oder Spannung auf das außerhalb von V liegende Feld und $\mathfrak{K}$ die innere Volumenkraft.

40. Volumenkräfte. Spannungen. Reaktionsprinzip. Wir wenden uns jetzt zur Gleichung (8) und setzen einen elektrostatischen Zustand voraus, also $\mathfrak{H} = 0$ und $\operatorname{rot}\mathfrak{E} = 0$. Dann ist

$$\text{(9)} \qquad \mathfrak{K} = \mathfrak{K}_1 + \frac{\mathfrak{E}\operatorname{div}\varepsilon\mathfrak{E}}{4\pi c^2} = \mathfrak{E}\varrho - \frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi c^2}\nabla\varepsilon,$$

d h. wir erhalten die schon fruher in Nr 31 benutzte Volumenkraft. Haben wir einen magnetostatischen Zustand, so ist $\mathfrak{E} = 0$ und $\operatorname{rot}\mathfrak{H} = 0$ und [1])

$$\text{(10)} \qquad \mathfrak{K} = -\frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}\nabla\mu$$

bei $\operatorname{div}\mu\mathfrak{H} = 0$.

Nehmen wir an, der Korper sei homogen, $\varrho = 0$ und der Zustand quasistationär, so können wir das Glied mit dem Faktor $\frac{1}{c^2}$ in (8) vernachlassigen und erhalten

---

1) Siehe Bd. 1 dieser Sammlung S. 76

(a) $$\mathfrak{K} = \frac{[\operatorname{rot}\mathfrak{H}\,\mathfrak{H}\mu]}{4\pi}.$$

Statt (1) können wir innerhalb eines Leiters schreiben

(b) $$4\pi\mathfrak{J} = \operatorname{rot}\mathfrak{H}$$

Aus (a) und (b) folgt

(11) $$\mathfrak{K} = [\mathfrak{J}\mathfrak{H}\mu],$$

der wohlbekannte Ausdruck für die Kraft auf die Volumeneinheit eines stromdurchflossenen Leiters im magnetischen Feld. Diese Kraft ist senkrecht zum Strom und zum magnetischen Feld.

Fur den freien Äther ist $\varrho = 0$, $\mathfrak{J} = 0$, $\mu = 1$, $\varepsilon = 1$. Setzen wir außerdem $\mathfrak{v} = 0$, so erhalten wir aus (8), (1) und (2)

(12) $$\mathfrak{K} = -\frac{1}{4\pi c^2}\left[\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}\mathfrak{E}\right] + \frac{1}{4\pi c^2}\left[\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}\mathfrak{H}\right] = \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial t}.$$

Es wirkt also im freien Äther auch bei $\mathfrak{v} = 0$ eine Volumenkraft, die der zeitlichen Änderung des Poyntingschen Strahlungsvektors proportional ist.

Wir bestimmen jetzt das Integral

$$\int_V \mathfrak{K}\,dv.$$

Aus (8) und (151) I erhalten wir sofort

(13) $$\int_V \mathfrak{K}\,dv = \int_F \mathfrak{P}\,df,$$

(14) wo $$\mathfrak{P} = -\mathfrak{P}_2$$

ist. Wir haben also auch hier, wie in Nr. 31, die Volumenkräfte durch Spannungen, die auf die Oberfläche wirken, ausgedruckt. Und zwar bedeutet $\mathfrak{P}$ die von außen auf das System innerhalb V ausgeübte Kraft, was mit (14) übereinstimmt.

Erweitern wir (13) auf den ganzen Raum, so erhalten wir, ebenso wie (18) Nr 31,

(15) $$\int_\infty \mathfrak{K}\,dv + \int_{F_1} \mathfrak{P}_1\,df = 0,$$

wo F_1 wieder eine Unstetigkeitsfläche und $\mathfrak{P}_1$ einen zu (15) Nr. 31 analogen Ausdruck bedeutet

Aus (15) ersehen wir, daß die Maxwell-Hertzschen Gleichungen für bewegte Körper dem Reaktionsprinzip genügen. Wir mussen aber hierbei die Kraft (12) in Kauf nehmen, die auch dort wirkt, wo keine ponderable Materie vorhanden ist.

VIII. Die Lorentzsche Elektrodynamik.

41. Allgemeine Gleichungen. Die Lorentzsche Theorie nimmt das Vorhandensein kleiner elektrischer Teilchen, der sogenannten Elektronen, an mit der Volumendichte ϱ der Elektrizität. Der Äther wird als ruhend betrachtet, er durchdringt alle Elektronen und alle materiellen Körper. Der Leitungsstrom $\mathfrak{J}$ wird durch einen Konvektionsstrom von Elektronen ersetzt:

$$\mathfrak{J} = \varrho\mathfrak{v}, \tag{1}$$

wo jetzt $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit der Elektronen bedeutet.

Da der Äther überall, auch innerhalb der Materie als gleich angenommen wird, so können wir sofort aus den Gleichungen (8) und (9) Nr. 33 zu den Lorentzschen Gleichungen übergehen, wenn wir dort $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$ setzen und (1) berücksichtigen. Wir erhalten dann

$$4\pi\varrho\mathfrak{v} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathfrak{H} \tag{2}$$

(3) und

$$-\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}\mathfrak{E}$$

Außerdem wird

$$\varrho = \frac{\operatorname{div}\mathfrak{E}}{4\pi c^2} \tag{4}$$

sein und

$$\operatorname{div}\mathfrak{H} = 0 \tag{5}$$

Aus (2) und (4) folgt unmittelbar

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\varrho\mathfrak{v} = 0, \tag{6}$$

die Kontinuitätsgleichung der Elektrizität Diese Gleichung stimmt der Form nach vollkommen mit (10b) Nr. 23 überein.

Die elektromagnetische Energie e pro Volumeneinheit ist

$$e = \frac{\mathfrak{E}^2}{8\pi c^2} + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}. \tag{7}$$

Setzen wir in (8) Nr 39 $\mathfrak{v} = 0$, $\varepsilon = \mu = 1$ und beachten (1) und (1), (2) Nr. 39, so erhalten wir

$$\mathfrak{K} = \varrho\mathfrak{E} + [\varrho\mathfrak{v}\mathfrak{H}] + \frac{\partial\mathfrak{S}}{c^2\partial t}. \tag{a}$$

Für den freien Äther, wo $\varrho = 0$ ist, geht (a) in (12) Nr. 40 uber Die Lorentzsche Theorie dagegen nimmt keine Kräfte auf den freien Äther an, sondern nur solche auf die Elektronen und setzt direkt

$$\mathfrak{K} = \varrho\mathfrak{E} + [\varrho\mathfrak{v}\mathfrak{H}]. \tag{8}$$

Die Kraft auf einen Körper ist gleich der resultierenden Kraft auf die im Innern des Körpers vorhandenen Elektronen. Die Dielektrizitätskonstante und die Permeabilität werden in der Lorentzschen Theorie durch das Verhalten der in der Materie befindlichen Elektronen erklärt

42. Energiegleichung. Reaktionsprinzip. Aus (2), (3) und (7) und (65) I erhalten wir

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -\operatorname{div}\mathfrak{S} - \varrho\mathfrak{v}\mathfrak{E},$$

oder da wegen (8) $\varrho\mathfrak{v}\mathfrak{E} = \mathfrak{K}\mathfrak{v}$ ist, so folgt hieraus die Energiegleichung

$$(9)\qquad -\frac{dE}{dt} = -\int\limits_V \frac{\partial e}{\partial t}\,dv = \int\limits_F \mathfrak{S}\,d\mathfrak{f} + \int\limits_V \mathfrak{K}\mathfrak{v}\,dv,$$

wobei, da der Äther ruht, auch F als ruhend angenommen ist.

Auf Grund von (2), (3) und (4) können wir anstatt $\mathfrak{K}$ in (8) auch schreiben

$$(a)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{K} &= \frac{\mathfrak{E}\operatorname{div}\mathfrak{E}}{4\pi c^2} + \frac{[\operatorname{rot}\mathfrak{H}\,\mathfrak{H}]}{4\pi} - \frac{1}{4\pi c^2}\left[\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}\mathfrak{H}\right] = \\ &= \frac{\mathfrak{E}\operatorname{div}\mathfrak{E}}{4\pi c^2} + \frac{[\operatorname{rot}\mathfrak{H}\,\mathfrak{H}]}{4\pi} + \frac{[\operatorname{rot}\mathfrak{E}\,\mathfrak{E}]}{4\pi c^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial t}. \end{aligned}\right.$$

Hieraus und aus (151) I ergibt sich

$$(10)\qquad \int\limits_V \mathfrak{K}\,dv = \int\limits_F \mathfrak{P}\,df - \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int\limits_V \mathfrak{S}\,dv,$$

wo $\mathfrak{P}$ denselben Wert hat wie in Nr 40, nur daß $\varepsilon = \mu = 1$ gesetzt ist

Erweitern wir (10) auf den ganzen Raum und beachten, daß hier keine Unstetigkeitsflächen vorhanden sind, so erhalten wir

$$(11)\qquad \int\limits_\infty \mathfrak{K}\,dv = -\frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int\limits_\infty \mathfrak{S}\,dv.$$

Hieraus ersehen wir, daß die Lorentzsche Theorie dem Reaktionsprinzip nicht genugt. Dies kommt daher, daß diese Theorie eine dem dritten Glied in (a) Nr 41 entsprechende Kraft nicht annimmt

Führen wir die Bezeichnung ein

$$(12)\qquad \frac{1}{c^2}\int \mathfrak{S}\,dv = \mathfrak{G}$$

und verstehen unter $\mathfrak{B}$ die Bewegungsgröße der wägbaren Massen (siehe Nr 1 und 3), so ist

$$\int\limits_{\infty} \mathfrak{K}\, dv = \frac{d\mathfrak{B}}{dt}, \tag{13}$$

und aus (11), (12) und (13) fließt

$$\mathfrak{B} + \mathfrak{G} = \text{konst.} \tag{14}$$

Infolgedessen konnen wir $\mathfrak{G}$ als die elektromagnetische Bewegungsgroße des Feldes deuten und aus (14) folgern, daß die Summe aus der mechanischen Bewegungsgroße der wägbaren Massen und der elektromagnetischen Bewegungsgröße des Feldes für ein abgeschlossenes System konstant ist

43. Die retardierten Potentiale. Aus (2) und (3) erhalten wir

$$4\pi \frac{\partial \varrho \mathfrak{v}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} = -\operatorname{rot}^2 \mathfrak{E}. \tag{15}$$

Mit Hilfe dieser Gleichung und (140a) I konnen wir ganz analoge Beziehungen erhalten wie in Nr. 35 Wir wollen uns aber diese Rechnungen sparen und direkt die in Nr. 35 abgeleiteten Ausdrucke benutzen, indem wir einfach $\varepsilon = \mu = 1$ und $\sigma \mathfrak{E} = \mathfrak{J} = \varrho \mathfrak{v}$ setzen und berücksichtigen, daß keine Unstetigkeitsflächen vorhanden sind Nehmen wir außerdem

$$m = \frac{1}{c} \tag{a}$$

an, so erhalten wir aus (26)—(28) und (31) Nr 35

$$\mathfrak{E} = -\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} - \nabla \psi \tag{16}$$

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{A} \tag{17}$$

$$\mathfrak{A} = \int\limits_V \left[\frac{\varrho \mathfrak{v}}{r}\right]_{t-\frac{r}{c}} dv \tag{18}$$

$$\psi = c^2 \int\limits_V \left[\frac{\varrho}{r}\right]_{t-\frac{r}{c}} dv, \tag{19}$$

wo sich V auf das von den Elektronen eingenommene Volumen bezieht, und aus (33)—(35) Nr. 35

$$\operatorname{div} \mathfrak{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \tag{20}$$

$$\nabla^2 \mathfrak{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = -4\pi\varrho\mathfrak{v} \tag{21}$$

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -4\pi c^2\varrho. \tag{22}$$

IX. Kristalloptik.

44. Einleitung. Bei der Behandlung der Kristalloptik benutzen wir die Maxwellschen Gleichungen für ruhende Körper und setzen

$$\mu = 1, \quad \sigma = 0. \tag{a}$$

Wir erhalten deshalb aus (8) und (9) Nr. 33

$$4\pi \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathfrak{H}, \tag{1}$$

$$-\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathfrak{E}. \tag{2}$$

Da wir es mit anisotropen Körpern zu tun haben, wird die Richtung von $\mathfrak{D}$ im allgemeinen nicht mit der von $\mathfrak{E}$ zusammenfallen

Multipliziert man (1) skalar mit $\frac{\mathfrak{E}}{4\pi}$ und (2) mit $-\frac{\mathfrak{H}}{4\pi}$ und addiert darauf, so erhält man nach (65) I

$$\mathfrak{E}\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi} = -\operatorname{div} \mathfrak{S}, \tag{3}$$

(4) wo
$$\mathfrak{S} = \frac{1}{4\pi}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$$

der Poyntingsche Vektor ist, vgl. (12) Nr. 33. Das zweite Glied links in (3) ist der Zuwachs der Dichte der magnetischen Energie in der Zeiteinheit. Daher werden wir das erste als die entsprechende elektrische Größe anzusehen haben, so daß $\mathfrak{E}\partial\mathfrak{D}$ ein vollständiges Differential sein muß. Außerdem ist erfahrungsmäßig $\mathfrak{D}$ eine lineare Funktion von $\mathfrak{E}$ und umgekehrt.

Nichts hindert uns, zur Veranschaulichung $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ als zwei Ortsvektoren $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{s}$ aufzufassen und die Beziehung zwischen beiden als eine affine Verzerrung des Raumes. Es sei also (siehe Nr 39 I)

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{r}\Phi = \mathfrak{r}\Pi + [\mathfrak{r}\mathfrak{c}] \quad \text{und} \quad \mathfrak{r}\Pi = \Pi\mathfrak{r}. \tag{b}$$

Dann ist unsre Frage, wann der Ausdruck

(c) $$\mathfrak{s}\,d\mathfrak{r} = \mathfrak{r}\Phi\,d\mathfrak{r} = \mathfrak{r}\Pi\,d\mathfrak{r} - [\mathfrak{c}\mathfrak{r}]\,d\mathfrak{r}$$

ein vollständiges Differential ist Das erste Glied rechts ist eins, nämlich nach (213) und (214) I

(d) $$\mathfrak{r}\Pi\,d\mathfrak{r} = \mathfrak{r}\,d(\Pi\mathfrak{r}) = d(\tfrac{1}{2}\mathfrak{r}\Pi\mathfrak{r}).$$

Damit auch das zweite Glied ein vollständiges Differential wäre, mußte $[\mathfrak{c}\mathfrak{r}]$ nach dem Stokesschen Satz ein wirbelfreier Vektor sein Tatsachlich ist aber

$$\operatorname{rot}[\mathfrak{c}\mathfrak{r}] = \mathfrak{c}\operatorname{div}\mathfrak{r} - \mathfrak{c}\nabla\cdot\mathfrak{r} = 3\mathfrak{c} - \mathfrak{c} = 2\mathfrak{c}.$$

Der Differentialausdruck $\mathfrak{r}\Phi\,d\mathfrak{r}$ kann mithin nach (c) nur dann ein vollständiges Differential sein, wenn $\mathfrak{c} = 0$ ist, d. h wenn der Affinor Φ symmetrisch ist

Daraus, daß erstens $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ linear voneinander abhangen und daß zweitens $\mathfrak{E}\partial\mathfrak{D}$ ein vollstandiges Differential ist, folgt demnach, daß jene linearen Funktionen symmetrisch sind, d h. daß der Affinor der Dielektrizitätskonstante ein Tensor ist. Wir setzen

(5) $$4\pi c^2\mathfrak{D} = \mathsf{T}\mathfrak{E},$$

(6) so daß $$\mathfrak{E} = \frac{4\pi c^2}{\mathsf{T}}\mathfrak{D}$$

Mit Hilfe seiner Hauptachsen $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ können wir den Tensor T darstellen durch den Ausdruck

(7) $$\mathsf{T} = \varepsilon_1\mathfrak{i}\cdot\mathfrak{i} + \varepsilon_2\mathfrak{j}\cdot\mathfrak{j} + \varepsilon_3\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{k},$$

(8) so daß $$4\pi c^2\mathfrak{D} = \mathsf{T}\mathfrak{E} = \varepsilon_1 E_1\mathfrak{i} + \varepsilon_2 E_2\mathfrak{j} + \varepsilon_3 E_3\mathfrak{k}$$

(9) und $$\frac{1}{\mathsf{T}} = \frac{\mathfrak{i}\;\mathfrak{i}}{\varepsilon_1} + \frac{\mathfrak{j}\;\mathfrak{j}}{\varepsilon_2} + \frac{\mathfrak{k}\;\mathfrak{k}}{\varepsilon_3}$$

Wenn $\mathfrak{E}$ parallel $\mathfrak{i}$ ist, wird

$$4\pi c^2\mathfrak{D} = \mathsf{T}\mathfrak{E} = \varepsilon_1 E_1\mathfrak{i}$$

Daher nennt man ε_1, ε_2, ε_3 die Haupt-Dielektrizitätskonstanten des Kristalls

Nach (5) und analog zu (d) ist

$$\partial(\tfrac{1}{2}\mathfrak{D}\mathfrak{E}) = \frac{\partial(\mathfrak{E}\mathsf{T}\mathfrak{E})}{8\pi c^2} = \mathfrak{E}\,\partial\frac{\mathsf{T}\mathfrak{E}}{4\pi c^2} = \mathfrak{E}\partial\mathfrak{D},$$

folglich die Dichte der elektromagnetischen Energie

(10) $$e = \frac{\mathfrak{D}\mathfrak{E}}{2} + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}.$$

45. Fortpflanzung des Lichtes in Kristallen. Wir setzen den Kristall als homogen voraus und betrachten die Fortpflanzung einer ebenen polarisierten Welle des Vektors $\mathfrak{E}$ in dem Kristall. Es werden parallele Ebenen — Wellenebenen — vorhanden sein, auf denen $\mathfrak{E}$ nach Größe, Richtung und Phase konstant ist Bezeichnen wir mit $\mathfrak{n}$ die Normale zu einer solchen Ebene — Wellennormale — in der Richtung vom Koordinatenanfang aus und mit $\mathfrak{r}$ den Radiusvektor vom Koordinatenanfang bis zu einem beliebigen Punkt der Wellenebene, so wird sich $\mathfrak{E}$ darstellen lassen durch den reellen Teil von

$$(11) \qquad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 e^{i\omega\left(t - \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{r}}{V}\right)}.$$

Denn $\mathfrak{n}\mathfrak{r}$ ist nichts anderes als die Entfernung der Wellenebene vom Koordinatenanfang. Der nach Ort und Zeit konstante Vektor $\mathfrak{E}_1$ bedeutet die Amplitude von $\mathfrak{E}$ im Koordinatenanfang ($\mathfrak{r} = 0$), und V ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenebene in Richtung der Wellennormale (Normalengeschwindigkeit) und $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Ebenso setzen wir

$$(11\text{a}) \qquad \mathfrak{D} = \mathfrak{D}_1 e^{i\omega\left(t - \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{r}}{V}\right)}, \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 e^{i\omega\left(t - \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{r}}{V}\right)}.$$

Da

$$\nabla \cdot \mathfrak{r}\mathfrak{n} = \mathfrak{n}\nabla \cdot \mathfrak{r} = \mathfrak{n}$$

ist, so kann man die Differentiatoren symbolisch durch Größen ersetzen, die als Faktoren zu gebrauchen sind:

$$\frac{\partial}{\partial t} = i\omega, \qquad \nabla = -\frac{i\omega}{V}\mathfrak{n}.$$

Führt man die Ausdrucke (11) in (1) und (2) ein, so erhalt man

$$(\text{a}) \qquad 4\pi V \mathfrak{D}_1 = [\mathfrak{H}_1 \mathfrak{n}],$$

$$(\text{b}) \qquad V \mathfrak{H}_1 = [\mathfrak{n} \mathfrak{E}_1].$$

Durch Beseitigung von $\mathfrak{H}_1$ folgt hieraus

$$(\text{c}) \qquad 4\pi V^2 \mathfrak{D}_1 = [[\mathfrak{n}\mathfrak{E}_1]\mathfrak{n}].$$

Multipliziert man ferner (a) vektorisch mit $\mathfrak{n}$ und beachtet, daß $\mathfrak{n}\mathfrak{H}_1$ nach (b) verschwindet, so bekommt man

$$(\text{d}) \qquad 4\pi V [\mathfrak{n}\mathfrak{D}_1] = \mathfrak{H}_1.$$

Ziehen wir noch (5) heran, so haben wir also

$$(12) \qquad \mathfrak{H} = \frac{1}{V}[\mathfrak{n}\mathfrak{E}] = 4\pi V [\mathfrak{n}\mathfrak{D}],$$

$$(13) \qquad \mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi V}[\mathfrak{H}\mathfrak{n}] = \frac{1}{4\pi V^2}[[\mathfrak{n}\mathfrak{E}]\mathfrak{n}] = \frac{\mathrm{T}}{4\pi c^2}\mathfrak{E}$$

Hierbei haben wir den Index 1 weggelassen, da wir $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ in dem ursprünglichen Sinn nicht mehr gebrauchen werden. Aus (12) und (13) lesen wir ab, daß in jedem Feldpunkt die beiden quellenfreien Vektoren $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ und der Normalenvektor $\mathfrak{n}$ in dieser Reihenfolge ein rechtwinkliges Rechtskreuz bilden (Fig 13, in der $\mathfrak{H}$ senkrecht zur Zeichenebene nach vorn geht) und daß die Vektoren $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$ senkrecht zu $\mathfrak{H}$, also komplanar sind, nämlich parallel der in Nr. 44 I als Hauptebene bezeichneten Ebene. (Die dortige Fig. 27 entspricht hier der Fig. 13.) Der spitze Winkel zwischen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ heiße φ. Die Vektoren $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$ liegen in der durch den Feldpunkt gehenden Ebene $\mathfrak{n}\mathfrak{r} =$ konst, die also eine Ebene konstanter Phase, eine Wellenebene ist. Die Ebene $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{n}$ heißt Polarisationsebene. In (12) und (13) kommen keine komplexen Vorzahlen vor Also sind an jedem Feldpunkt alle Schwingungen miteinander in Phase, wie bei einem nicht absorbierenden Medium nicht anders zu erwarten ist Wir dürfen daher alle Vektoren in (12) und (13) als reell annehmen Statt (11) hätten wir demnach nicht weniger bequem auch

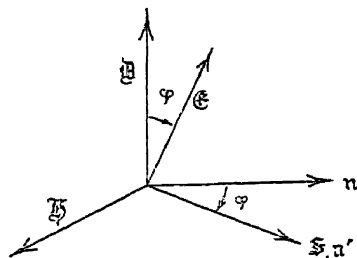



Fig 13

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 \cos\omega\left(t - \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{r}}{V}\right), \quad \text{usw}$$

setzen können

Aus (12) und (13) berechnen wir

$$V^2\mathfrak{H}^2 = [\mathfrak{n}\mathfrak{E}]^2 = 4\pi V^2 \mathfrak{E}\mathfrak{D}.$$

Also ist nach (10) an jedem Punkt die Dichte der elektrischen Energie gleich der Dichte der magnetischen Energie; daher die Dichte der Gesamtenergie

$$\text{(e)} \qquad e = \frac{[\mathfrak{n}\mathfrak{E}]^2}{4\pi V^2}.$$

Für den durch (4) erklärten Poyntingschen Vektor finden wir aus (12)

$$\text{(f)} \qquad \mathfrak{S} = \frac{1}{4\pi V}[\mathfrak{E}[\mathfrak{n}\mathfrak{E}]] = V[\mathfrak{E}[\mathfrak{n}\mathfrak{D}]]$$

$\mathfrak{S}$ zeigt, wie man annimmt, die Richtung des Lichtstrahls an. Das rechtwinklige Rechtskreuz $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{S}$ hat mit dem andern $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{n}$ den Vektor $\mathfrak{H}$ gemein und ist gegen dieses um den Winkel φ um die Achse $\mathfrak{H}$ zurückgedreht (Fig 13).

Wenn die Phasen in der Normalenrichtung $\mathfrak{n}$ mit der Geschwindigkeit V fortschreiten, so haben sie entlang $\mathfrak{S}$ die sogenannte Strahlengeschwindigkeit $V' = \frac{V}{\cos\varphi}$. Setzen wir also $\mathfrak{S} = |\mathfrak{S}| \cdot \mathfrak{n}'$, so haben wir die beiden Geschwindigkeitsvektoren $V\mathfrak{n}$ und $V'\mathfrak{n}'$. Nun ist

$$[\mathfrak{n}\mathfrak{E}]^2 = \mathfrak{E}^2 \cos^2\varphi = \frac{V^2}{V'^2}\,\mathfrak{E}^2,$$

(14) folglich nach (e) $e = \frac{\mathfrak{E}^2}{4\pi V'^2}$

(15) und nach (f) $\mathfrak{S} = \frac{\mathfrak{E}^2}{4\pi V'}\,\mathfrak{n}' = eV'\,\mathfrak{n}'.$

Aus (f) und (15) findet man

$$\mathfrak{n}' = \frac{V'}{V}\left(\mathfrak{n} - \frac{\mathfrak{n}\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}^2} \cdot \mathfrak{E}\right) = \frac{V'}{V}\,\frac{[\mathfrak{E}[\mathfrak{n}\mathfrak{E}]]}{\mathfrak{E}^2},$$

und nach (c) ist

(g) $4\pi V^2 \mathfrak{D} = \mathfrak{E} - \mathfrak{E}\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{n} = [[\mathfrak{n}\mathfrak{E}]\mathfrak{n}].$

Hieraus berechnet man leicht

$$4\pi V V' [\mathfrak{n}'\mathfrak{D}] = [\mathfrak{n}\mathfrak{E}],$$

und wenn man hier nochmals mit $\mathfrak{n}'$ vektorisch multipliziert,

(h) $4\pi V'^2 [[\mathfrak{n}'\mathfrak{D}]\mathfrak{n}'] = \mathfrak{E}$

Den Gleichungen (12) und (13) kann man jetzt die folgenden gegenüberstellen, von deren Richtigkeit man sich leicht überzeugt:

(16) $\mathfrak{H} = 4\pi V' [\mathfrak{n}'\mathfrak{D}] = \frac{1}{V'}\,[\mathfrak{n}'\mathfrak{E}],$

(17) $\mathfrak{E} = V' [\mathfrak{H}\mathfrak{n}'] = 4\pi V'^2 [[\mathfrak{n}'\mathfrak{D}]\mathfrak{n}'] = \frac{4\pi c^2}{\mathrm{T}}\,\mathfrak{D}$

In unsern Gleichungen sind die Geschwindigkeiten V, V' und damit der Winkel φ noch unbestimmt. Sie werden davon abhangen, welche Richtung etwa die Wellennormale $\mathfrak{n}$ im Kristall hat. Auch haben wir bisher nur die gegenseitige Lage der Vektoren untersucht: Denken wir uns die Wellennormale $\mathfrak{n}$ festgehalten; dann können wir die bisher bestimmte Figur noch beliebig um die Wellennormale drehen. Tatsächlich wird aber die Figur im Kristall nicht alle diese Lagen haben können. Wir wollen deshalb jetzt noch untersuchen, wie die Geschwindigkeiten V, V' und die Richtungen der Vektoren von dem Tensor T der Dielektrizitatskonstante und von der Richtung der Wellennormale $\mathfrak{n}$ abhangen.

Wie wir schon hervorgehoben haben, müssen $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$ in einer Hauptebene liegen. Nun wissen wir aber aus den Erörterungen in Nr 44 I, daß es zwei solcher Hauptebenen gibt, die zueinander senkrecht sind. Diese beiden Hauptebenen bestimmen deshalb die beiden möglichen Schwingungsebenen für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{D}$

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{E}_0$ den Einheitsvektor von $\mathfrak{E}$, so folgt aus (5) und (g):

$$\text{(i)} \qquad \mathsf{T}\mathfrak{E}_0 = \frac{c^2}{V^2}(\mathfrak{E}_0 - \mathfrak{E}_0\mathfrak{n}\cdot\mathfrak{n}).$$

Ein Vergleich mit (227) I ergibt $p = \frac{c^2}{V^2}$.

Beachten wir (244) und (247) I und ferner, daß in unserem Falle wegen (7) die Großen a_1, a_2, a_3 in Nr 45 I hier die Werte

$$\text{(k)} \qquad a_1 = \varepsilon_1; \qquad a_2 = \varepsilon_2; \qquad a_3 = \varepsilon_3$$

haben, so erhalten wir aus (245) I:

$$\text{(18)} \qquad \frac{(\mathfrak{n}\mathfrak{i})^2}{a^2 - V^2} + \frac{(\mathfrak{n}\mathfrak{j})^2}{b^2 - V^2} + \frac{(\mathfrak{n}\mathfrak{k})^2}{m^2 - V^2} = 0$$

$$\text{(18a)} \quad \text{mit} \quad a^2 = \frac{c^2}{\varepsilon_1}; \qquad b^2 = \frac{c^2}{\varepsilon_2}; \qquad m^2 = \frac{c^2}{\varepsilon_3},$$

was das bekannte Fresnelsche Gesetz ausdruckt.

Die Hauptwerte des Tensors des el. V $\mathfrak{B}$ in Nr 45 I sind also:

$$\text{(l)} \qquad b_1 = \sqrt{\varepsilon_1} = \frac{c}{a}; \qquad b_2 = \sqrt{\varepsilon_2} = \frac{c}{b}; \qquad b_3 = \sqrt{\varepsilon_3} = \frac{c}{m}.$$

Aus Nr. 45 I ersehen wir nun, daß die Achsen derjenigen Ellipse, die durch den Schnitt einer zu $\mathfrak{n}$ senkrechten Ebene mit dem Ellipsoid (l) erzeugt wird, die Lagen der beiden gesuchten Hauptebenen, also die beiden moglichen Schwingungsrichtungen von $\mathfrak{D}$ ergeben, die, wie schon mehrmals hervorgehoben, senkrecht zueinander sind

Die entsprechenden Werte von V bestimmen sich aus der quadratischen Gleichung (18) für V^2.

Ebenso verfahren wir bei der Bestimmung der Geschwindigkeit V'.

Aus (h) ergibt sich·

$$\text{(m)} \qquad \mathfrak{E}_0 = \frac{V'^2}{c^2}(\mathsf{T}\mathfrak{E}_0 - \mathfrak{n}'\mathsf{T}\mathfrak{E}_0\cdot\mathfrak{n}').$$

Ein Vergleich mit (228) I ergibt $h = \frac{V'^2}{c^2}$.

Unter Berücksichtigung von (244) und (247) I erhalten wir aus (246) I:

$$\text{(19)} \qquad \frac{(\mathfrak{n}'\mathfrak{i})^2 a^2}{V'^2 - a^2} + \frac{(\mathfrak{n}'\mathfrak{j})^2 b^2}{V'^2 - b^2} + \frac{(\mathfrak{n}'\mathfrak{k})^2 m^2}{V'^2 - m^2} = 0.$$

Die Hauptwerte des Tensors des el. V. $\mathfrak{M}$ in Nr. 45 I sind:

(n) $$m_1 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} = \frac{a}{c}; \qquad m_2 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}} = \frac{b}{c}; \qquad m_3 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_3}} = \frac{m}{c}.$$

Schneiden wir dieses Ellipsoid durch eine zu $\mathfrak{n}'$ senkrechte Ebene, so geben uns die Achsen der Schnittellipse die beiden Hauptebenen und damit die beiden möglichen Schwingungsrichtungen von $\mathfrak{E}$ an. Die entsprechenden Geschwindigkeiten V bestimmen sich aus (19)

Um ganz automatisch zu den Gleichungen (18) und (19) zu gelangen, konnen wir auch folgendermaßen verfahren.[1])

Wir drucken in (g) den allein stehenden Vektor $\mathfrak{E}$ nach (6) durch den Vektor $\mathfrak{D}$ aus:

$$4\pi\left(\frac{c^2}{\mathsf{T}} - V^2\right)\mathfrak{D} = \mathfrak{n}\cdot\mathfrak{n}\mathfrak{E},$$

oder anders geschrieben:

$$\frac{4\pi\mathfrak{D}}{\mathfrak{n}\mathfrak{E}} = \left(\frac{c^2}{\mathsf{T}} - V^2\right)^{-1}\mathfrak{n}.$$

Wenn wir hier mit $\mathfrak{n}$ skalar multiplizieren, verschwindet $\mathfrak{n}\mathfrak{D}$ nach (13), daher

(18b) $$\mathfrak{n}\left(\frac{c^2}{\mathsf{T}} - V^2\right)^{-1}\mathfrak{n} = 0$$

Führen wir hier die Hauptachsen $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ des Kristalls ein, so ist:

(18c) $$\left(\frac{c^2}{\mathsf{T}} - V^2\right)^{-1} = \frac{\mathfrak{i}\;\mathfrak{i}}{a^2 - V^2} + \frac{\mathfrak{j}\cdot\mathfrak{j}}{b^2 - V^2} + \frac{\mathfrak{k}\;\mathfrak{k}}{m^2 - V^2}$$

mit denselben Werten (18a) Ersichtlich ist (18b) mit (18) gleichbedeutend.

Es sei noch besonders darauf aufmerksam gemacht, daß der symmetrische Ausdruck (18c) kein Tensor ist, weil sich darin V^2 mit $\mathfrak{n}$ ändert

Ebenso folgt aus (h):

$$4\pi V'^2\mathfrak{n}'\;\;\mathfrak{n}'\mathfrak{D} = 4\pi V'^2\mathfrak{D} - \mathfrak{E},$$

oder indem man rechts $\mathfrak{D}$ nach (5) durch $\mathfrak{E}$ ausdrückt:

$$\left(\frac{V'^2}{c^2}\mathsf{T} - 1\right)\mathfrak{E} = 4\pi V'^2\mathfrak{n}'\cdot\mathfrak{n}'\mathfrak{D}$$

und daraus: $$\frac{1}{4\pi V'^2}\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{n}'\mathfrak{D}} = \left(\frac{V'^2}{c^2}\mathsf{T} - 1\right)^{-1}\mathfrak{n}'$$

---

1) Vgl. O Heaviside, El. Pap II, S 10 u Electrom. Th II, S 522. — F Emde, Auszüge aus Maxwells El u. Magn, Braunschweig 1915, S 151 u f

Wenn wir hier mit $\mathfrak{n}'$ skalar multiplizieren, verschwindet $\mathfrak{n}'\mathfrak{E}$ nach (17); daher

(19a)
$$\mathfrak{n}'\left(\frac{V'^2}{c^2}\mathsf{T}-1\right)^{-1}\mathfrak{n}'=0,$$

was, bezogen auf die Hauptachsen, zu der Gleichung (19) führt.

Tragt man von einem Feldpunkt aus nach allen Richtungen $\mathfrak{n}$ die Geschwindigkeitsvektoren $V\mathfrak{n}$ ab, so liegen ihre Endpunkte auf einer geschlossenen Fläche. Sie heißt die Normalenfläche, und (18b) ist ihre Gleichung in Polarkoordinaten

Entsprechend liegen die Endpunkte der von einem Feldpunkt aus aufgetragenen Geschwindigkeitsvektoren $V'\mathfrak{n}'$ auf der Strahlenflache, deren Gleichung in Polarkoordinaten (19a) ist.

In allem Vorhergehenden ist entsprechend (241) I (o) angenommen

$$\varepsilon_3 > \varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0.$$

Dann ergibt sich aus (18a)

(p)
$$a > b > m.$$

Fallt die Wellennormale z. B. mit der Hauptachse $\mathfrak{i}$ zusammen, so liefern (18) und (19)

(r)
$$V_1 = V_1' = m; \qquad V_2 = V_2' = b$$

D. h. die beiden Normalengeschwindigkeiten V_1 und V_2 sind gleich den beiden Strahlengeschwindigkeiten V_1' und V_2' und gleich m und b Ein analoges Resultat erhalten wir, wenn $\mathfrak{n}$ mit den anderen Achsen zusammenfällt. Man bezeichnet deshalb a, b, m als die Hauptlichtgeschwindigkeiten

Aus (18a) und (12) folgt, daß die Halbachsen b_1, b_2 und b_3 gleich den Hauptbrechungsexponenten des Kristalles sind Man nennt das entsprechende Ellipsoid $\mathfrak{r}\mathsf{T}^{-1}\mathfrak{r} = 1$ das Indexellipsoid. Das Ellipsoid $\mathfrak{r}\mathsf{T}\mathfrak{r} = 1$ des el. V. $\mathfrak{M}$, dessen Halbachsen wegen (n) gleich den reziproken Werten der Hauptbrechungsexponenten sind, wird als das Fresnelsche Ellipsoid bezeichnet Zugleich ergibt sich aus (n), daß die Halbachsen des letzten Ellipsoids proportional den Hauptlichtgeschwindigkeiten sind; und zwar fällt wegen (p) die großte Geschwindigkeit a mit der $\mathfrak{i}$-Achse, die mittlere b mit der $\mathfrak{j}$-Achse und die kleinste m mit der $\mathfrak{k}$-Achse zusammen

Die Normalen $\mathfrak{n}_1$ und $\mathfrak{n}_2$, d h die Achsen der Kreisschnitte des Indexellipsoids sind nichts anderes als die optischen Achsen des Kristalls oder die Binormalen Die Achsen der Kreisschnitte des Fresnelschen Ellipsoids, also $\mathfrak{n}_1'$ und $\mathfrak{n}_2'$ sind die sogenannten Strahlenachsen oder Biradialen.

Die Richtungen der Binormalen und der Biradialen bestimmen sich mit Hilfe von (251) und (252) I, und zwar ist wegen (l) und (n)

$$(20) \qquad g_1 = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - m^2}}; \qquad g_2 = \sqrt{\frac{b^2 - m^2}{a^2 - m^2}}$$

$$(21) \quad \text{und} \qquad g_1' = \frac{m}{b}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - m^2}}; \quad g_2' = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2 - m^2}{a^2 - m^2}}.$$

Es bedeuten hier also g_1 und g_1' die Kosinusse der Winkel zwischen der Binormalen bzw. der Biradialen und der i-Achse (d. i. Achse der größten Geschwindigkeit des Fresnelschen Ellipsoids), und g_2 und g_2' die entsprechenden Werte der Kosinusse der Winkel gegen die $\mathfrak{k}$-Achse (d. i. Achse der kleinsten Geschwindigkeit des Fresnelschen Ellipsoids).

Fällt die Wellennormale mit einer der Binormalen zusammen, so ergibt sich aus (18), wenn wir dort $\mathfrak{n}\mathfrak{i} = g_1$ und $\mathfrak{n}\mathfrak{k} = g_2$ setzen und beachten, daß jetzt $\mathfrak{n}\mathfrak{j} = 0$ ist, $V = b$. Es werden unendlich viele Schwingungsrichtungen existieren, und bei einer Drehung der Schwingungsebene um die Binormale wird der Strahl verschiedene Winkel mit ihr bilden, die sich aus (253) I bestimmen Die Strahlen bilden einen Kegel, dessen Offnungswinkel φ_1 wir aus (253) I erhalten, wenn wir dort $\psi = 0$ setzen, und zwar ist wegen (k) und (18a)

$$(22) \qquad \operatorname{tg} \varphi_1 = -\frac{\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - m^2)}}{b^2}.$$

Das Minuszeichen bedeutet, daß der Kegel zwischen der Binormalen und der $\mathfrak{k}$-Achse liegt.

Für $\psi = 90^0$ ist $\varphi = 0$ Den Winkel φ_1 in (22) nennt man den Winkel der inneren konischen Refraktion

Fällt der Strahl mit der Biradialen zusammen, so erhalten wir ebenso einen Kegel, der von den Wellennormalen gebildet ist und dessen Öffnungswinkel φ_2 sich aus (254) I bestimmt, wenn wir dort $\psi_1 = 0$ setzen. Es ist

$$(23) \qquad \operatorname{tg} \varphi_2 = -\frac{\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - m^2)}}{am}.$$

Hier bedeutet das Minuszeichen, daß der Kegel zwischen der Biradialen und der i-Achse liegt

Für $\psi_1 = 90^0$ ist $\varphi = 0$. Die entsprechende Strahlengeschwindigkeit ist ebenfalls $V' = b$. Der Winkel φ_2 ist der Winkel der äußeren konischen Refraktion.

Sachverzeichnis zum I. und II. Teil.

Die römische Zahl (I) hinter der Seitenzahl bezieht sich auf den ersten Teil dieser Schrift